Applications linéaires

Exercice 1 : Linéaire ou non linéaire

Dire si chacune des applications suivantes est linéaire. Justifier par une preuve ou par un contre-exemple.

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \to (x - 2y + z, 3y)$.
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \to (x + y, y + 1)$.
3. $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to xy$.
4. $f_4 : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$, $P \to P(2) - P'(0)$.
5. $f_5 : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, qui à g associe la fonction $x \to x\, g(x)$. Est-ce un endomorphisme ?
6. $f_6 : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $M \to \det M$.

Exercice 2 : Différence finie sur les polynômes de degré 2

On considère l'application $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $u(P) = P(X + 1) - P(X)$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Calculer $u(1)$, $u(X)$ et $u(X^2)$.
3. Déterminer $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$, avec une base de chacun.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

4. Vérifier le théorème du rang sur cet exemple. L'endomorphisme u est-il injectif ? surjectif ?

Exercice 3 : Noyau et image d'un endomorphisme de l'espace

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer $\ker f$ et en donner une base.
3. Montrer que $\operatorname{Im} f$ est contenue dans le plan P d'équation $x + y + z = 0$, puis qu'elle lui est égale.
4. Les sous-espaces $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4 : Injectivité et équation de l'image

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x + 2y, 3x + 4y, x - y)$.

1. Montrer que f est injective en calculant son noyau.
2. Quel est le rang de f ? L'application f est-elle surjective ?
3. Déterminer une équation cartésienne de $\operatorname{Im} f$.
4. Le vecteur $(1, 1, -2)$ appartient-il à $\operatorname{Im} f$? Si oui, déterminer son unique antécédent.

Exercice 5 : Opérations sur deux endomorphismes du plan

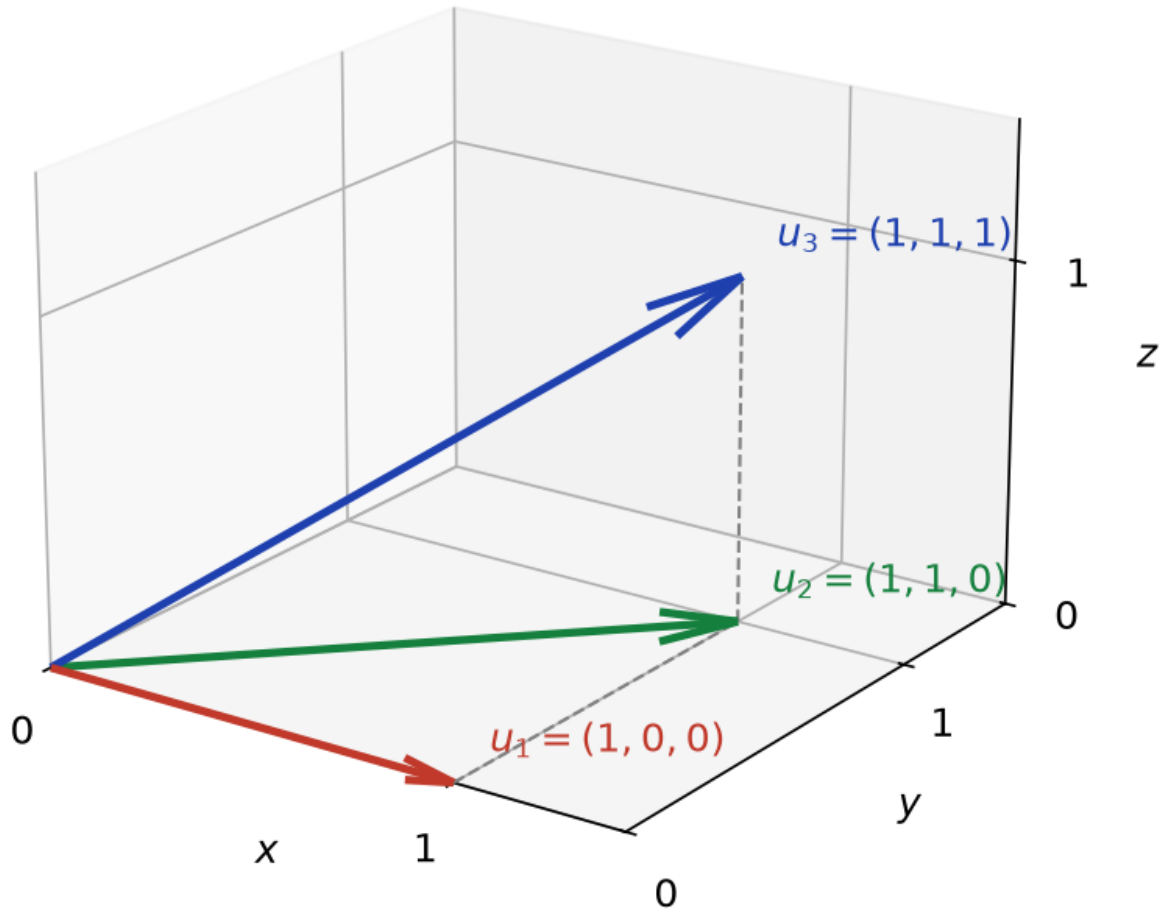
On considère les endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^2$ définis par $f(x,y)=(y,x)$ et $g(x,y)=(x,0)$.

1. Calculer $f\circ g$ et $g\circ f$. Conclure sur la commutativité de la composition.
2. Calculer l'endomorphisme $2f-g$.
3. Calculer $f\circ f$ et $g\circ g$. En déduire que f est un automorphisme et donner f^{-1}.
4. On pose $h=f\circ g$. Calculer $h\circ h$. Que peut-on en conclure sur le produit de composition dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$?

Exercice 6 : Application définie par l'image d'une base

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u_1=(1,0,0)$, $u_2=(1,1,0)$ et $u_3=(1,1,1)$, comme sur la figure ci-dessous.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



1. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, et exprimer un vecteur (x, y, z) dans cette base.

2. Justifier qu'il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(u_1) = (1, 2)$, $f(u_2) = (0, 1)$ et $f(u_3) = (3, 1)$. Donner l'expression de $f(x, y, z)$.

3. Déterminer le rang de f, puis une base de son noyau.

4. Existe-t-il une application linéaire $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $g(1, 1) = (1, 0)$, $g(2, 1) = (0, 1)$ et $g(3, 2) = (1, 2)$?

Exercice 7 : Théorème du rang en dimension 4

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z,t) = (x+y+z+t, x-y+z-t, 2x+2z)$.

1. Calculer les images des vecteurs de la base canonique et en déduire le rang de f.
2. En déduire la dimension de $\ker f$ sans résoudre de système, puis déterminer une base de $\ker f$.
3. Déterminer une équation de $\operatorname{Im} f$. L'application f est-elle surjective ?

Exercice 8 : Un endomorphisme de polynômes inversible

Soit $n \geq 1$. On définit $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ par $u(P) = P + P'$.

1. Montrer que u est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit P non nul. Comparer les degrés de $u(P)$ et de P. En déduire $\ker u$.
3. En déduire que u est un automorphisme, sans chercher sa réciproque.
4. Pour $n = 2$, déterminer le polynôme P tel que $u(P) = X^2$.
5. Pour $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $v(Q) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k Q^{(k)}$. Montrer que $u \circ v = \mathrm{Id}$ et conclure que $v = u^{-1}$.

Exercice 9 : Dimension infinie : les équivalences tombent

Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère $D : P \to P'$ et $M : P \to XP$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

1. Montrer que D et M sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que D est surjectif mais non injectif.
3. Montrer que M est injectif mais non surjectif.
4. Calculer $D \circ M - M \circ D$.
5. Pour $n \geq 1$, la restriction de D à $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer son noyau et son rang. Expliquer pourquoi ces résultats sont cohérents avec le cours.

Exercice 10 : Composée nulle et endomorphisme de carré nul

Les espaces sont de dimension finie.

1. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \ker g$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = n$ et $u \circ u = 0$. Montrer que $\operatorname{rg} u \leq \frac{n}{2}$.
3. Vérifier que $u : (x, y, z, t) \to (z, t, 0, 0)$ vérifie $u \circ u = 0$ sur $\mathbb{R}^4$, et que l'inégalité est une égalité.
4. Existe-t-il un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ de rang 2 tel que $u \circ u = 0$?

Exercice 11 : Rang d'une composée

Soient E, F, G de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer que $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$, puis que $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg} g$.
2. En appliquant le théorème du rang à la restriction de g à $\operatorname{Im} f$, montrer que

$\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}\ f$.

3. Montrer que si g est injective, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}\ f$. Montrer que si f est surjective, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}\ g$.

4. Soient $a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ et $b \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Montrer que $b \circ a$ n'est jamais un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12 : Reconnaître un projecteur du plan

Soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $p(x, y) = (2x - 2y, x - y)$.

1. Montrer que p est un projecteur.

2. Déterminer $\mathrm{Im}\ p$ et $\ker p$. Décrire géométriquement p.

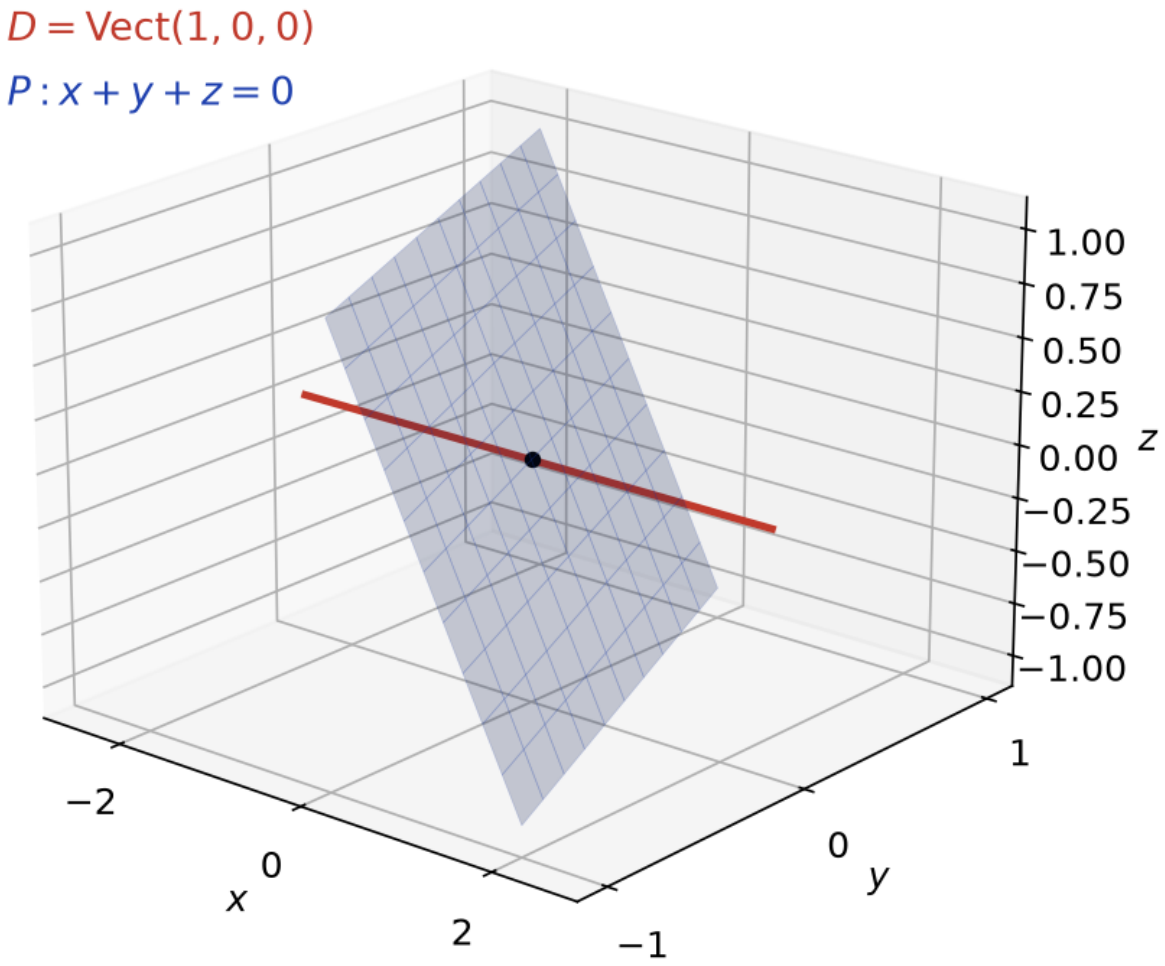
3. Calculer $p(1, 3)$ et écrire $(1, 3)$ comme somme d'un vecteur de $\mathrm{Im}\ p$ et d'un vecteur de $\ker p$.

4. Déterminer l'expression de la symétrie s associée, puis vérifier que $s \circ s = \mathrm{Id}$.

Exercice 13 : Une symétrie de l'espace

Soit $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $s(x, y, z) = (-x - 2y - 2z, y, z)$. On note P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et $D = \mathrm{Vect}((1, 0, 0))$, représentés ci-dessous.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



1. Montrer que s est linéaire et que $s \circ s = \mathrm{Id}$.
2. Déterminer $\ker(s - \mathrm{Id})$ et $\ker(s + \mathrm{Id})$.
3. En déduire la nature géométrique de s.
4. Donner l'expression du projecteur p sur P parallèlement à D.
5. Calculer $p(1,1,1)$ et $s(1,1,1)$.

Exercice 14 : Transposition et matrices symétriques

Soit $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $T(M) = M + M^{\mathrm{T}}$. On note $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{A}_2$ les sous-espaces des matrices symétriques et antisymétriques.

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\ker T$ et sa dimension.
3. Montrer que $\operatorname{Im} T \subset \mathcal{S}_2$, puis que $\operatorname{Im} T = \mathcal{S}_2$ à l'aide du théorème du rang.
4. Montrer que $p = \frac{1}{2} T$ est un projecteur et préciser ses éléments caractéristiques.
5. Décomposer $M = \left([\texttt{ray?}] \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{matrix} , \right)$ en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 15 : Hyperplans en dimension 4 et polynômes

1. Soit $H = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,\mathrm{s}\, x +, + 2y - z + t = 0 \right\}$. Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.
2. Montrer que $D = \operatorname{Vect}((1, 0, 0, 0))$ est un supplémentaire de H.
3. Soit $n \geq 1$ et $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$, $P \to P(1)$. Montrer que $K = \ker \varphi$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Montrer que la famille $\left((X - 1) X^k \right)_0 \leq k \leq n-1$ est une base de K, et que $\mathbb{R}_0[X]$ est un supplémentaire de K.
5. L'application $P \to P(0) P(1)$ est-elle une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 16 : Formes linéaires et intersection d'hyperplans

Soit E un espace de dimension finie $n \geq 2$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

1. Soient φ, ψ deux formes linéaires sur E avec $\varphi \neq 0$ et $\ker \varphi \subset \ker \psi$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda \varphi$.

2. Déterminer toutes les formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ qui s'annulent sur le plan d'équation $x - y + 2z = 0$.

3. Soient $H_1 = \ker \varphi$ et $H_2 = \ker \psi$ deux hyperplans distincts. En étudiant $\Phi : x \to (\varphi(x), \psi(x))$, montrer que $\dim (H_1 \cap H_2) = n - 2$.

4. Application : dans $\mathbb{R}^4$, déterminer une base de l'intersection des hyperplans d'équations $x + y + z + t = 0$ et $x - y + z - t = 0$.

Exercice 17 : Suites des noyaux et des images itérés

Soit E de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $N_k = \ker f^k$ et $I_k = \operatorname{Im} f^k$.

1. Montrer que $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$ pour tout k.

2. Montrer qu'il existe un entier $k \leq n$ tel que $N_k = N_{k+1}$.

3. Montrer que si $N_k = N_{k+1}$, alors $N_{k+1} = N_{k+2}$. En déduire que la suite (N_j) est constante à partir du rang k.

4. Montrer que, pour ce même k, la suite (I_j) est constante à partir du rang k.

5. Exemple : $f(x, y, z) = (y, z, 0)$ sur $\mathbb{R}^3$. Déterminer N_1, N_2, N_3 et les rangs de f, f^2, f^3.

Exercice 18 : Noyau et image supplémentaires

Soit E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$ si et seulement si $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.
2. Montrer que $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ si et seulement si $\ker f = \ker f^2$.
3. Montrer que $\ker f = \ker f^2$ si et seulement si $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
4. Vérifier ces propriétés pour un projecteur. Montrer qu'elles sont fausses pour $g : (x, y) \to (y, 0)$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 19 : Somme de deux projecteurs

Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que si $p \circ q = q \circ p = 0$, alors $p + q$ est un projecteur.
2. Réciproquement, on suppose que $p + q$ est un projecteur. Montrer que $p \circ q + q \circ p = 0$, puis que $p \circ q = q \circ p = 0$.
3. Sous ces conditions, montrer que $\operatorname{Im}(p + q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$ et que $\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q$.
4. Illustrer avec $p(x, y, z) = (x, 0, 0)$ et $q(x, y, z) = (0, y, 0)$ sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 20 : Problème : endomorphismes de rang 1

Soit E de dimension finie $n \geq 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. On choisit un vecteur non nul a tel que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(a)$.

1. Montrer qu'il existe une unique application $\varphi : E \to \mathbb{K}$ telle que $f(x) = \varphi(x)\, a$ pour tout $x \in E$, et que φ est une forme linéaire non nulle.
2. Montrer que $\ker f = \ker \varphi$ est un hyperplan de E.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

3. Montrer que $f \circ f = \varphi(a)\, f$.

4. En déduire que f est un projecteur si et seulement si $\varphi(a) = 1$, et que $f \circ f = 0$ si et seulement si $a \in \ker f$.

5. Montrer que $\mathrm{Id}_E + f$ est un automorphisme si et seulement si $\varphi(a) \neq -1$. Dans ce cas, vérifier que son inverse est $\mathrm{Id}_E - \frac{1}{1+\varphi(a)} f$.

6. Application : $f(x, y, z) = (x + y + z)(1, 2, -1)$ sur $\mathbb{R}^3$. Identifier a et φ , calculer $f \circ f$, et donner l'inverse de $\mathrm{Id} + f$.

Exercice 21 : Problème : interpolation de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts. On définit $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ par $u(P) = (P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n))$.

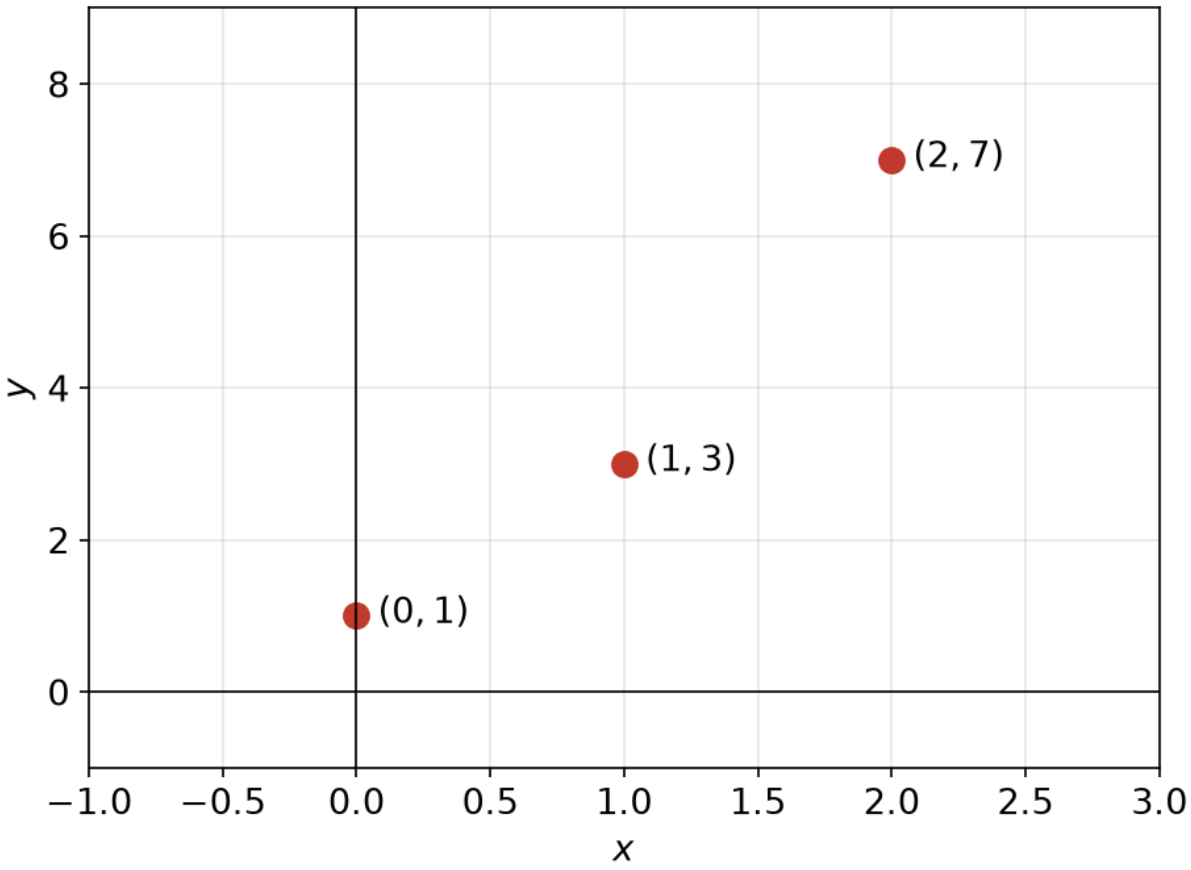
1. Montrer que u est linéaire.

2. Montrer que u est injective.

3. En déduire que u est un isomorphisme. Traduire ce résultat en termes de polynômes.

4. Pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, on pose $L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$. Calculer $u(L_i)$ et en déduire que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. On prend $n = 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Déterminer l'unique $P \in \mathbb{R}_2[X]$ dont la courbe passe par les trois points de la figure ci-dessous.



Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.

Pour aller plus loin en L1

- Le cours : applications linéaires, cours de maths en L1

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

- Les solutions : corrigé des exercices sur applications linéaires
- À maîtriser avant : Familles libres, bases et dimension
- Chapitre précédent : Familles libres, bases et dimension
- Chapitre suivant : Matrice d'une application linéaire et changement de base
- Le sommaire : tous les chapitres de maths de L1 et la licence de maths de L1 à L3