

## Applications linéaires

### Exercice 1 : Linéaire ou non linéaire

Dire si chacune des applications suivantes est linéaire. Justifier par une preuve ou par un contre-exemple.

1.  $f_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y, z) \rightarrow (x - 2y + z, 3y)$ .
2.  $f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \rightarrow (x + y, y + 1)$ .
3.  $f_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \rightarrow xy$ .
4.  $f_4: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $P \rightarrow P(2) - P'(0)$ .
5.  $f_5: \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , qui à  $g$  associe la fonction  $x \rightarrow x g(x)$ . Est-ce un endomorphisme ?
6.  $f_6: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M \rightarrow \det M$ .

### Exercice 2 : Différence finie sur les polynômes de degré 2

On considère l'application  $u: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$  définie par  $u(P) = P(X + 1) - P(X)$ .

1. Montrer que  $u$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Calculer  $u(1)$ ,  $u(X)$  et  $u(X^2)$ .
3. Déterminer  $\ker u$  et  $\operatorname{Im} u$ , avec une base de chacun.

4. Vérifier le théorème du rang sur cet exemple. L'endomorphisme  $u$  est-il injectif ? surjectif ?

### Exercice 3 : Noyau et image d'un endomorphisme de l'espace

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$ .

1. Montrer que  $f$  est linéaire.
2. Déterminer  $\ker f$  et en donner une base.
3. Montrer que  $\operatorname{Im} f$  est contenue dans le plan  $P$  d'équation  $x + y + z = 0$ , puis qu'elle lui est égale.
4. Les sous-espaces  $\ker f$  et  $\operatorname{Im} f$  sont-ils supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$  ?

### Exercice 4 : Injectivité et équation de l'image

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $f(x, y) = (x + 2y, 3x + 4y, x - y)$ .

1. Montrer que  $f$  est injective en calculant son noyau.
2. Quel est le rang de  $f$  ? L'application  $f$  est-elle surjective ?
3. Déterminer une équation cartésienne de  $\operatorname{Im} f$ .
4. Le vecteur  $(1, 1, -2)$  appartient-il à  $\operatorname{Im} f$  ? Si oui, déterminer son unique antécédent.

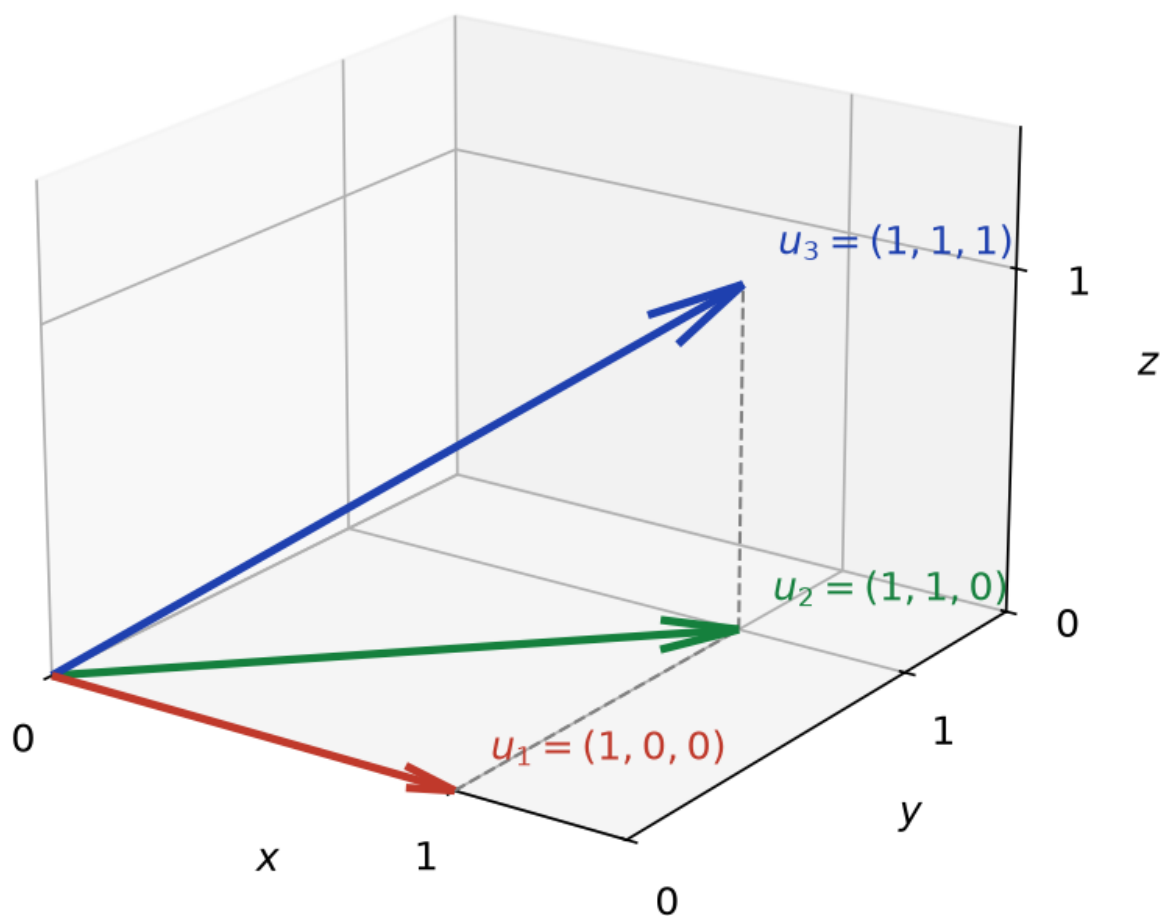
### Exercice 5 : Opérations sur deux endomorphismes du plan

On considère les endomorphismes  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{R}^2$  définis par  $f(x, y) = (y, x)$  et  $g(x, y) = (x, 0)$ .

1. Calculer  $f \circ g$  et  $g \circ f$ . Conclure sur la commutativité de la composition.
2. Calculer l'endomorphisme  $2f - g$ .
3. Calculer  $f \circ f$  et  $g \circ g$ . En déduire que  $f$  est un automorphisme et donner  $f^{-1}$ .
4. On pose  $h = f \circ g$ . Calculer  $h \circ h$ . Que peut-on en conclure sur le produit de composition dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  ?

### Exercice 6 : Application définie par l'image d'une base

Dans  $\mathbb{R}^3$ , on pose  $u_1 = (1, 0, 0)$ ,  $u_2 = (1, 1, 0)$  et  $u_3 = (1, 1, 1)$ , comme sur la figure ci-dessous.



1. Montrer que  $(u_1, u_2, u_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ , et exprimer un vecteur  $(x, y, z)$  dans cette base.
2. Justifier qu'il existe une unique application linéaire  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $f(u_1) = (1, 2)$ ,  $f(u_2) = (0, 1)$  et  $f(u_3) = (3, 1)$ . Donner l'expression de  $f(x, y, z)$ .
3. Déterminer le rang de  $f$ , puis une base de son noyau.
4. Existe-t-il une application linéaire  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $g(1, 1) = (1, 0)$ ,  $g(2, 1) = (0, 1)$  et  $g(3, 2) = (1, 2)$  ?

### Exercice 7 : Théorème du rang en dimension 4

Soit  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $f(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x - y + z - t, 2x + 2z)$ .

1. Calculer les images des vecteurs de la base canonique et en déduire le rang de  $f$ .
2. En déduire la dimension de  $\ker f$  sans résoudre de système, puis déterminer une base de  $\ker f$ .
3. Déterminer une équation de  $\operatorname{Im} f$ . L'application  $f$  est-elle surjective ?

### Exercice 8 : Un endomorphisme de polynômes inversible

Soit  $n \geq 1$ . On définit  $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$  par  $u(P) = P + P'$ .

1. Montrer que  $u$  est bien un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Soit  $P$  non nul. Comparer les degrés de  $u(P)$  et de  $P$ . En déduire  $\ker u$ .
3. En déduire que  $u$  est un automorphisme, sans chercher sa réciproque.
4. Pour  $n = 2$ , déterminer le polynôme  $P$  tel que  $u(P) = X^2$ .
5. Pour  $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ , on pose  $v(Q) = \sum_{k=0}^n (-1)^k Q^{(k)}$ . Montrer que  $u \circ v = \operatorname{Id}$  et conclure que  $v = u^{-1}$ .

### Exercice 9 : Dimension infinie : les équivalences tombent

Dans  $\mathbb{R}[X]$ , on considère  $D : P \rightarrow P'$  et  $M : P \rightarrow XP$ .

1. Montrer que  $D$  et  $M$  sont des endomorphismes de  $\mathbb{R}[X]$ .
2. Montrer que  $D$  est surjectif mais non injectif.
3. Montrer que  $M$  est injectif mais non surjectif.
4. Calculer  $D \circ M - M \circ D$ .
5. Pour  $n \geq 1$ , la restriction de  $D$  à  $\mathbb{R}_n[X]$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Déterminer son noyau et son rang. Expliquer pourquoi ces résultats sont cohérents avec le cours.

### Exercice 10 : Composée nulle et endomorphisme de carré nul

Les espaces sont de dimension finie.

1. Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Montrer que  $g \circ f = 0$  si et seulement si  $\text{Im } f \subset \ker g$ .
2. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  avec  $\dim E = n$  et  $u \circ u = 0$ . Montrer que  $\text{rg } u \leq \frac{n}{2}$ .
3. Vérifier que  $u : (x, y, z, t) \rightarrow (z, t, 0, 0)$  vérifie  $u \circ u = 0$  sur  $\mathbb{R}^4$ , et que l'inégalité est une égalité.
4. Existe-t-il un endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{R}^3$  de rang 2 tel que  $u \circ u = 0$  ?

### Exercice 11 : Rang d'une composée

Soient  $E, F, G$  de dimension finie,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ .

1. Montrer que  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$ , puis que  $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg } g$ .
2. En appliquant le théorème du rang à la restriction de  $g$  à  $\text{Im } f$ , montrer que

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg} f.$$

- Montrer que si  $g$  est injective, alors  $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$ . Montrer que si  $f$  est surjective, alors  $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$ .
- Soient  $\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$  et  $\beta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ . Montrer que  $\beta \circ \alpha$  n'est jamais un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

### Exercice 12 : Reconnaître un projecteur du plan

Soit  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $p(x, y) = (2x - 2y, x - y)$ .

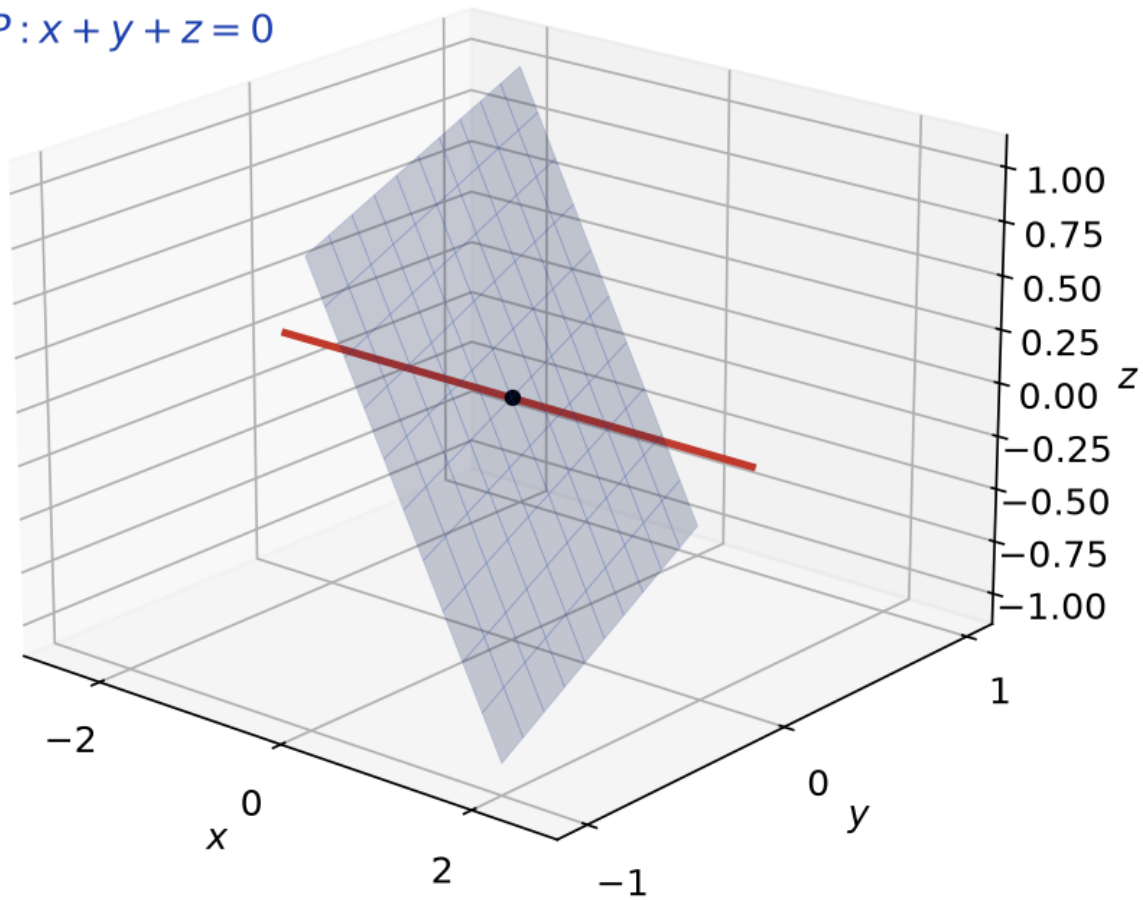
- Montrer que  $p$  est un projecteur.
- Déterminer  $\operatorname{Im} p$  et  $\ker p$ . Décrire géométriquement  $p$ .
- Calculer  $p(1, 3)$  et écrire  $(1, 3)$  comme somme d'un vecteur de  $\operatorname{Im} p$  et d'un vecteur de  $\ker p$ .
- Déterminer l'expression de la symétrie  $s$  associée, puis vérifier que  $s \circ s = \operatorname{Id}$ .

### Exercice 13 : Une symétrie de l'espace

Soit  $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $s(x, y, z) = (-x - 2y - 2z, x + y, x + y + z)$ . On note  $P$  le plan d'équation  $x + y + z = 0$  et  $D = \operatorname{Vect}((1, 0, 0))$ , représentés ci-dessous.

$$D = \text{Vect}(1, 0, 0)$$

$$P : x + y + z = 0$$



1. Montrer que  $s$  est linéaire et que  $s \circ s = \text{Id}$ .
2. Déterminer  $\ker(s - \text{Id})$  et  $\ker(s + \text{Id})$ .
3. En déduire la nature géométrique de  $s$ .
4. Donner l'expression du projecteur  $p$  sur  $P$  parallèlement à  $D$ .
5. Calculer  $p(1, 1, 1)$  et  $s(1, 1, 1)$ .

Soit  $T: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  définie par  $T(M) = M + M^T$ . On note  $\mathcal{S}_2$  et  $\mathcal{A}_2$  les sous-espaces des matrices symétriques et antisymétriques.

1. Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
2. Déterminer  $\ker T$  et sa dimension.
3. Montrer que  $\operatorname{Im} T \subset \mathcal{S}_2$ , puis que  $\operatorname{Im} T = \mathcal{S}_2$  à l'aide du théorème du rang.
4. Montrer que  $p = \frac{1}{2} T$  est un projecteur et préciser ses éléments caractéristiques.
5. Décomposer  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$  en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

### Exercice 15 : Hyperplans en dimension 4 et polynômes

1. Soit  $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z + t = 0\}$ . Montrer que  $H$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}^4$  et en donner une base.
2. Montrer que  $D = \operatorname{Vect}((1, 0, 0, 0))$  est un supplémentaire de  $H$ .
3. Soit  $n \geq 1$  et  $\varphi: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto P(1)$ . Montrer que  $K = \ker \varphi$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
4. Montrer que la famille  $((X-1)^k)_{0 \leq k \leq n-1}$  est une base de  $K$ , et que  $\mathbb{R}_0[X]$  est un supplémentaire de  $K$ .
5. L'application  $P \mapsto P(0)P(1)$  est-elle une forme linéaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$  ?

### Exercice 16 : Formes linéaires et intersection d'hyperplans

Soit  $E$  un espace de dimension finie  $n \geq 2$ .

1. Soient  $\varphi, \psi$  deux formes linéaires sur  $E$  avec  $\varphi \neq 0$  et  $\ker \varphi \subset \ker \psi$ . Montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $\psi = \lambda \varphi$ .
2. Déterminer toutes les formes linéaires sur  $\mathbb{R}^3$  qui s'annulent sur le plan d'équation  $x - y + 2z = 0$ .
3. Soient  $H_1 = \ker \varphi$  et  $H_2 = \ker \psi$  deux hyperplans distincts. En étudiant  $\Phi : x \rightarrow (\varphi(x), \psi(x))$ , montrer que  $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$ .
4. Application : dans  $\mathbb{R}^4$ , déterminer une base de l'intersection des hyperplans d'équations  $x + y + z + t = 0$  et  $x - y + z - t = 0$ .

### Exercice 17 : Suites des noyaux et des images itérés

Soit  $E$  de dimension finie  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $N_k = \ker f^k$  et  $I_k = \operatorname{Im} f^k$ .

1. Montrer que  $N_k \subset N_{k+1}$  et  $I_{k+1} \subset I_k$  pour tout  $k$ .
2. Montrer qu'il existe un entier  $k \leq n$  tel que  $N_k = N_{k+1}$ .
3. Montrer que si  $N_k = N_{k+1}$ , alors  $N_{k+1} = N_{k+2}$ . En déduire que la suite  $(N_j)$  est constante à partir du rang  $k$ .
4. Montrer que, pour ce même  $k$ , la suite  $(I_j)$  est constante à partir du rang  $k$ .
5. Exemple :  $f(x, y, z) = (y, z, 0)$  sur  $\mathbb{R}^3$ . Déterminer  $N_1, N_2, N_3$  et les rangs de  $f, f^2, f^3$ .

### Exercice 18 : Noyau et image supplémentaires

Soit  $E$  de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Montrer que  $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$  si et seulement si  $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ .
2. Montrer que  $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$  si et seulement si  $\ker f = \ker f^2$ .
3. Montrer que  $\ker f = \ker f^2$  si et seulement si  $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ .
4. Vérifier ces propriétés pour un projecteur. Montrer qu'elles sont fausses pour  $g : (x, y) \rightarrow (y, 0)$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

### Exercice 19 : Somme de deux projecteurs

Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

1. Montrer que si  $p \circ q = q \circ p = 0$ , alors  $p + q$  est un projecteur.
2. Réciproquement, on suppose que  $p + q$  est un projecteur. Montrer que  $p \circ q + q \circ p = 0$ , puis que  $p \circ q = q \circ p = 0$ .
3. Sous ces conditions, montrer que  $\operatorname{Im}(p + q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$  et que  $\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q$ .
4. Illustrer avec  $p(x, y, z) = (x, 0, 0)$  et  $q(x, y, z) = (0, y, 0)$  sur  $\mathbb{R}^3$ .

### Exercice 20 : Problème : endomorphismes de rang 1

Soit  $E$  de dimension finie  $n \geq 2$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  de rang 1. On choisit un vecteur non nul  $a$  tel que  $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(a)$ .

1. Montrer qu'il existe une unique application  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$  telle que  $f(x) = \varphi(x) a$  pour tout  $x \in E$ , et que  $\varphi$  est une forme linéaire non nulle.
2. Montrer que  $\ker f = \ker \varphi$  est un hyperplan de  $E$ .

3. Montrer que  $f \circ f = \varphi(a) f$ .
4. En déduire que  $f$  est un projecteur si et seulement si  $\varphi(a) = 1$ , et que  $f \circ f = 0$  si et seulement si  $a \in \ker f$ .
5. Montrer que  $\text{Id}_E + f$  est un automorphisme si et seulement si  $\varphi(a) \neq -1$ . Dans ce cas, vérifier que son inverse est  $\text{Id}_E - \frac{1}{1 + \varphi(a)} f$ .
6. Application :  $f(x, y, z) = (x + y + z)(1, 2, -1)$  sur  $\mathbb{R}^3$ . Identifier  $a$  et  $\varphi$ , calculer  $f \circ f$ , et donner l'inverse de  $\text{Id} + f$ .

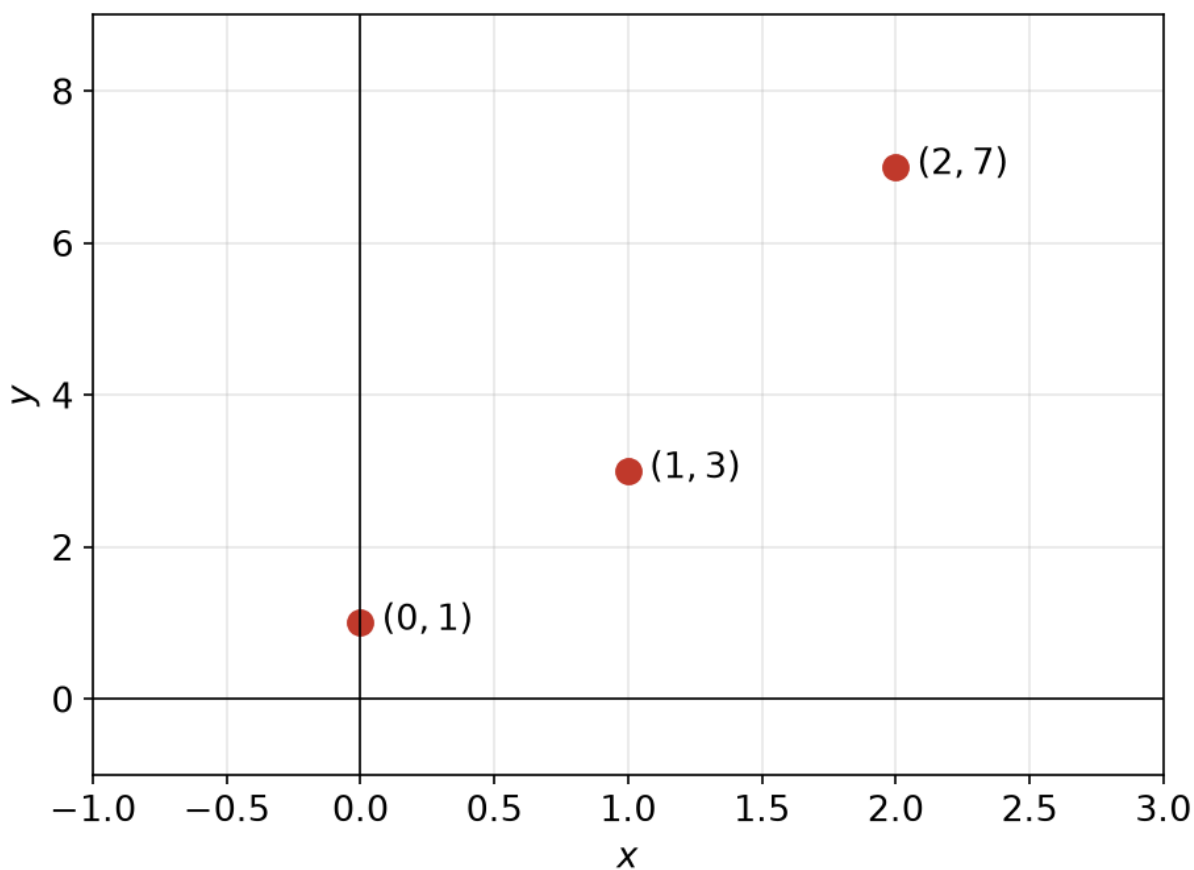
### Exercice 21 : Problème : interpolation de Lagrange

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $a_0, a_1, \dots, a_n$  des réels deux à deux distincts. On définit  $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  par  $u(P) = (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n))$ .

1. Montrer que  $u$  est linéaire.
2. Montrer que  $u$  est injective.
3. En déduire que  $u$  est un isomorphisme. Traduire ce résultat en termes de polynômes.

4. Pour  $i \in \{0, \dots, n\}$ , on pose  $L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$ . Calculer  $u(L_i)$  et en déduire que  $(L_0, \dots, L_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

5. On prend  $n = 2$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ . Déterminer l'unique  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  dont la courbe passe par les trois points de la figure ci-dessous.



## Le corrigé des exercices

---

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



## Pour aller plus loin en L1

---

- Le cours : [applications linéaires, cours de maths en L1](#)

- Les solutions : [corrigé des exercices sur applications linéaires](#)
- À maîtriser avant : [Familles libres, bases et dimension](#)
- Chapitre précédent : [Familles libres, bases et dimension](#)
- Chapitre suivant : [Matrice d'une application linéaire et changement de base](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)