

Applications linéaires

Corrigé de l'exercice 1 : Reconnaître une application linéaire

- Soient $u = (x, y)$, $u' = (x', y')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
 $f_1(\lambda u + u') = (\lambda x + x' + \lambda y + y', 2\lambda x + 2x' - \lambda y - y')$. Ce vecteur est égal à $\lambda f_1(u) + f_1(u')$.
Donc f_1 est linéaire.
- On a $f_2(0, 0) = (1, 0) \neq (0, 0)$. Or une application linéaire envoie le vecteur nul sur le vecteur nul. **Donc f_2 n'est pas linéaire.**
- D'une part, $f_3(-1, 0) = (1, 0)$. D'autre part, $-f_3(1, 0) = (-1, 0)$. La relation $f_3(\lambda u) = \lambda f_3(u)$ échoue pour $\lambda = -1$. **Donc f_3 n'est pas linéaire.**
- Soit I_2 la matrice identité. Alors $\det(2I_2) = 4$, alors que $2 \det(I_2) = 2$. **Le déterminant n'est donc pas linéaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.**
- La dérivation est linéaire, et la multiplication par X aussi. En effet,
 $(\lambda P + Q)' + X(\lambda P + Q) = \lambda(P' + XP) + (Q' + XQ)$. **Donc f_5 est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.**
- L'évaluation en 0 est linéaire, et l'intégrale sur $[0, 1]$ est linéaire. Par conséquent, leur somme est linéaire. **Ainsi, f_6 est une forme linéaire sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.**
- Pour f_1 , le noyau s'obtient en résolvant $x + y = 0$ et $2x - y = 0$. En ajoutant, $3x = 0$, donc $x = y = 0$. Ensuite, soit $P \neq 0$ de degré d . Alors $\deg(XP) = d + 1$ et $\deg P' < d$, donc $\deg(P' + XP) = d + 1$ et $f_5(P) \neq 0$.
 Enfin, la fonction $g(t) = 4t - 1$ vérifie $g(0) = -1$ et $\int_0^1 g = 2 - 1 = 1$, donc $f_6(g) = 0$ avec $g \neq 0$. **Les applications f_1 et f_5 sont injectives ; f_6 ne l'est pas.**

Point de méthode : pour réfuter la linéarité, on teste d'abord l'image de 0 , puis un multiple simple comme $-u$ ou $2u$.

Corrigé de l'exercice 2 : Noyau et image dans $\mathbb{R}^3$

1. On résout $f(x, y, z) = 0$:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

En additionnant les deux premières lignes, on obtient $3x = 0$, donc $x = 0$. Ensuite, la première donne $y = z$, et la troisième est alors vérifiée. **Ainsi,** $\ker f = \text{Vect}((0, 1, 1))$.

2. L'image est engendrée par les images de la base canonique : $f(e_1) = (1, 2, 1)$, $f(e_2) = (-1, 1, 2)$ et $f(e_3) = (1, -1, -2)$. On remarque que $f(e_3) = -f(e_2)$. De plus, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ ne sont pas colinéaires. **Donc** $((1, 2, 1), (-1, 1, 2))$ **est une base de** $\text{Im } f$. Par ailleurs, la troisième coordonnée de $f(x, y, z)$ est la deuxième moins la première. Tout vecteur (a, b, c) de l'image vérifie donc $c = b - a$. Ce plan est de dimension 2, comme $\text{Im } f$. **Par conséquent,** $\text{Im } f$ **est le plan d'équation** $a - b + c = 0$.

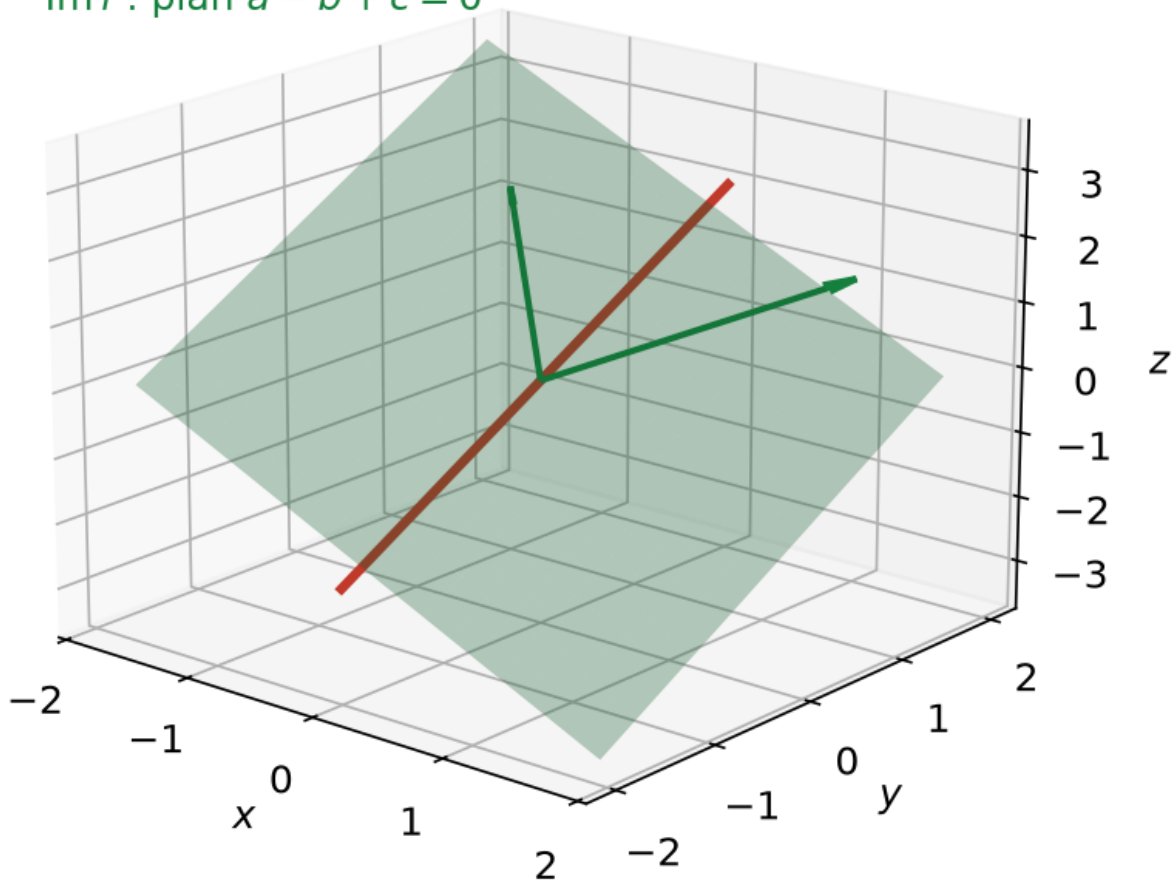
3. On a $\dim \ker f + \text{rg } f = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Le théorème du rang est bien vérifié. **L'application** f **n'est ni injective (noyau non nul) ni surjective (rang 2).**

4. Le vecteur $(1, 1, 0)$ vérifie $1 - 1 + 0 = 0$, donc il est dans l'image. On résout $x - y + z = 1$ et $2x + y - z = 1$. En ajoutant, $3x = 2$, donc $x = \frac{2}{3}$. Ensuite, $z - y = \frac{1}{3}$. Le vecteur $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$ convient : on vérifie que f l'envoie sur $(1, 1, 0)$. **Les antécédents sont les vecteurs** $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} + t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. C'est un antécédent particulier plus le noyau.

La figure ci-dessous montre le résultat : le noyau est une droite, l'image est un plan qui contient les deux vecteurs de base trouvés.

$$\text{Ker } f = \text{Vect}(0, 1, 1)$$

$$\text{Im } f : \text{plan } a - b + c = 0$$



Corrigé de l'exercice 3 : Un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$

1. Si $\deg P \leq 2$, alors $\deg(XP') \leq 2$. Donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$. De plus, la dérivation et la multiplication par X sont linéaires. **Ainsi, φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.**
2. On calcule $\varphi(1) = 1$, $\varphi(X) = X - X = 0$ et $\varphi(X^2) = X^2 - 2X^2 = -X^2$.
Donc, pour $P = a + bX + cX^2$, on obtient $\varphi(P) = a - cX^2$. Ce polynôme est nul si et seulement si $a = c = 0$. **Par conséquent, $\ker \varphi = \text{Vect}(X)$, $\text{Im } \varphi = \text{Vect}(1, X^2)$ et $\text{rg } \varphi = 2$.**
3. La famille $(X, 1, X^2)$ est la base canonique, à l'ordre près. **Donc $\mathbb{R}_2[X] = \ker \varphi \oplus \text{Im } \varphi$**

4. On a $\varphi(\varphi(X^2)) = \varphi(-X^2) = X^2 \neq \varphi(X^2)$. Donc φ n'est pas un projecteur. En revanche, $\varphi^2(a + bX + cX^2) = \varphi(a - cX^2) = a + cX^2$. Ainsi φ^2 garde les composantes sur 1 et X^2 , et annule celle sur X . Par suite, $\varphi^4 = \varphi^2$. Donc φ^2 est la projection sur $\text{Vect}(1, X^2)$ parallèlement à $\text{Vect}(X)$.

Corrigé de l'exercice 4 : Un projecteur du plan

- On calcule $p(p(x, y)) = p(2x - 2y, x - y)$. La première coordonnée vaut $2(2x - 2y) - 2(x - y) = 2x - 2y$. La seconde vaut $(2x - 2y) - (x - y) = x - y$.
Donc $p \circ p = p$, et p est un projecteur.
- D'abord, $p(x, y) = 0$ équivaut à $x = y$. Donc $\ker p = \text{Vect}((1, 1))$. Ensuite, $p(x, y) = (x - y)(2, 1)$, donc $\text{Im } p \subset \text{Vect}((2, 1))$. L'égalité vient de $p(1, 0) = (2, 1)$.
Ainsi, p est la projection sur la droite $\text{Vect}((2, 1))$ parallèlement à la droite $\text{Vect}((1, 1))$.
- On a $p(1, 0) = (2, 1)$. La composante dans le noyau est $(1, 0) - p(1, 0) = (-1, -1)$. Donc $(1, 0) = (2, 1) + (-1, -1)$, avec $(2, 1) \in \text{Im } p$ et $(-1, -1) \in \ker p$.
- $q(x, y) = (x - 2x + 2y, -x + 2y)$.
On obtient $q(x, y) = (-x + 2y, -x + 2y)$. De plus, $q^2 = \text{id} - 2p + p^2 = \text{id} - p = q$.
Enfin, $\text{Im } q = \ker p$ et $\ker q = \text{Im } p$. Donc q est la projection sur $\text{Vect}((1, 1))$ parallèlement à $\text{Vect}((2, 1))$.

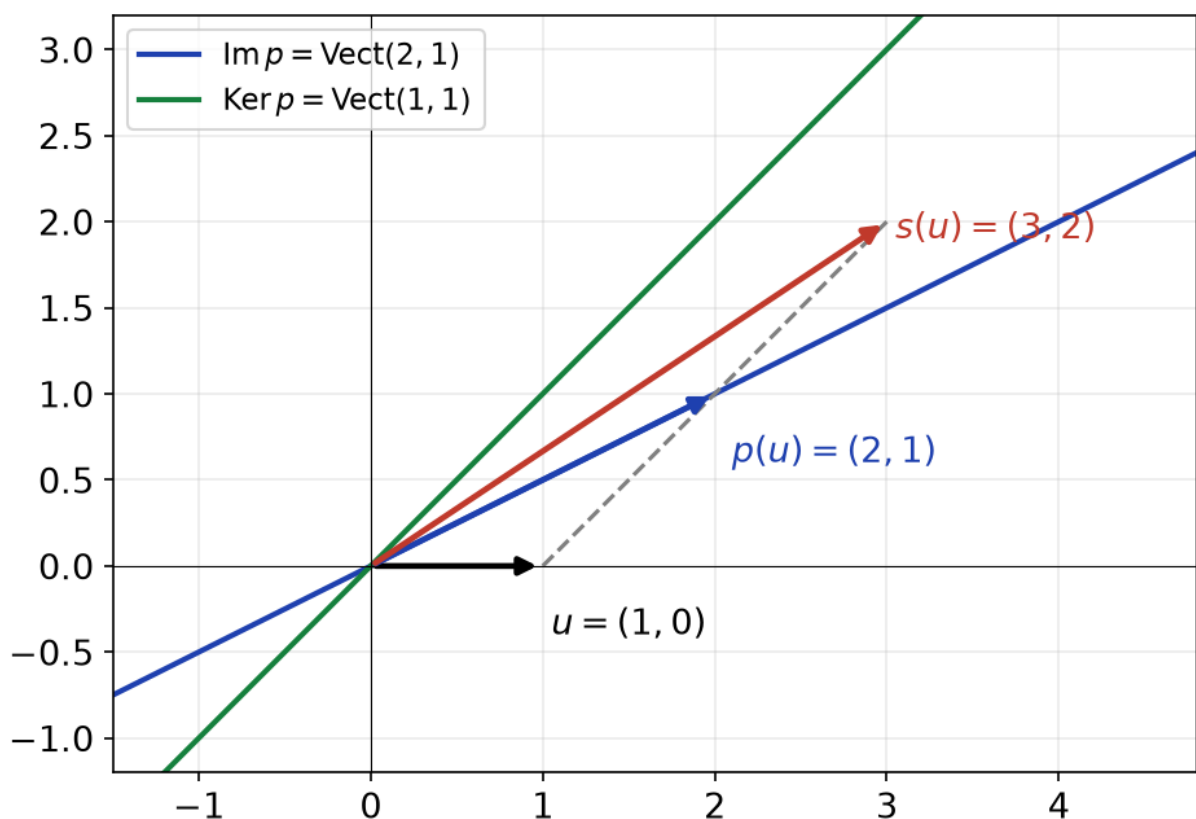
Corrigé de l'exercice 5 : Une symétrie du plan

- On calcule $s(s(x, y)) = s(3x - 4y, 2x - 3y)$. La première coordonnée vaut $3(3x - 4y) - 4(2x - 3y) = x$. La seconde vaut $2(3x - 4y) - 3(2x - 3y) = y$.
Donc $s \circ s = \text{id}$: s est une symétrie, et s est bijective avec $s^{-1} = s$.
- D'abord, $s(x, y) = (x, y)$ équivaut à $2x - 4y = 0$, c'est-à-dire $x = 2y$. Ensuite, $s(x, y) = -(x, y)$ équivaut à $4x - 4y = 0$, soit $x = y$. Donc $\ker(s - \text{id}) = \text{Vect}((2, 1))$ et $\ker(s + \text{id}) = \text{Vect}((1, 1))$: s est la symétrie par

rapport à $\text{Vect}((2, 1))$ parallèlement à $\text{Vect}((1, 1))$.

3. On calcule $(4x - 4y - x, 2x - 2y - y) = (3x - 4y, 2x - 3y)$. Donc $s = 2p - \text{id}$: c'est la symétrie associée au projecteur de l'exercice 4, et $s(1, 0) = (3, 2)$.

La figure ci-dessous résume les exercices 4 et 5. Le vecteur $p(u)$ est le milieu du segment joignant u à $s(u)$.



Corrigé de l'exercice 6 : Espaces isomorphes et dimension

1. On a $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$, $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$ et $\dim \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) = 2 \times 2 = 4$. L'application $a + bX + cX^2 + dX^3 \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est linéaire. Elle envoie la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ sur la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. C'est donc un isomorphisme.

2. L'application $(a, b, c) \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Elle est injective, car la matrice nulle impose $a = b = c = 0$. Elle est aussi surjective, car toute matrice symétrique a cette forme. **Donc $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathbb{R}^3$, et $\dim \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) = 3$.**
3. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Son rang est au plus 2. Par le théorème du rang, $\dim \ker f = 3 - \text{rg } f \geq 1$. Donc f n'est pas injective. De même, si $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, alors $\text{rg } g \leq 2 < 3$. **Aucune injection linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, aucune surjection linéaire de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ n'existe.**
4. On a $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$ et $\dim \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) = 6$. **Donc $\dim \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})) = 3 \times 6 = 18$.**

Corrigé de l'exercice 7 : Projection sur un plan parallèlement à une droite

1. Le vecteur $w = (1, 2, 0)$ vérifie $1 + 2 + 0 = 3 \neq 0$, donc $w \notin P$. Ainsi $P \cap D = \{0\}$, car D est une droite. De plus, $\dim P + \dim D = 2 + 1 = 3$. **Par conséquent, $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.**
2. Soit $u = (x, y, z)$. On cherche t tel que $u - tw \in P$. Cela s'écrit $(x - t) + (y - 2t) + z = 0$, soit $t = \frac{x + y + z}{3}$. Alors $p(u) = u - tw$. **On obtient**
- $$p(x, y, z) = \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-2x + y - 2z}{3}, z \right).$$
3. La symétrie vérifie $s = 2p - \text{id}$, c'est-à-dire $s(u) = u - 2tw$. **On obtient**
- $$s(x, y, z) = \left(\frac{x - 2y - 2z}{3}, \frac{-4x - y - 4z}{3}, z \right).$$
4. Pour w : $p(1, 2, 0) = (0, 0, 0)$ et $s(1, 2, 0) = (-1, -2, 0) = -w$, comme attendu pour un vecteur de D . Pour $(1, -1, 0)$, qui est dans P :
- $$p(1, -1, 0) = \left(\frac{3}{3}, \frac{-3}{3}, 0 \right) = (1, -1, 0), \text{ et de même } s(1, -1, 0) = (1, -1, 0). \text{ Les formules sont cohérentes avec la définition géométrique.}$$

Corrigé de l'exercice 8 : Construire une application linéaire par l'image d'une base

1. Une application linéaire est déterminée de façon unique par l'image d'une base, choisie librement. D'où l'existence et l'unicité de u . Par linéarité,

$$u(x, y, z) = x(1, 1, 0) + y(0, 1, 1) + z(1, 2, 1). \text{ Donc } u(x, y, z) = (x + z, x + y + z, y + z).$$

s'obtient avec $x = -z$ et $y = -z$; la deuxième équation est alors vérifiée. Ainsi, $\ker u = \text{Vect}((1, 1, -1))$. Ensuite, $u(e_3) = u(e_1) + u(e_2)$, et $u(e_1)$, $u(e_2)$ ne sont pas colinéaires. **Par conséquent**, $\text{Im } u = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$, **plan d'équation** $a - b + c = 0$.

2. On a $(2, 0) = (1, 1) + (1, -1)$. Si v existait, sa linéarité imposerait $v(2, 0) = (1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$. Or on demande $v(2, 0) = (1, 2)$. **Une telle application v n'existe donc pas.**

3. On complète $k = (1, 1, 1)$ en une base (k, e_1, e_2) de $\mathbb{R}^3$. C'est bien une base, car $k \notin \text{Vect}(e_1, e_2)$. On pose alors $w(k) = 0$, $w(e_1) = e_1$ et $w(e_2) = e_2$. Comme $e_3 = k - e_1 - e_2$, on obtient $w(e_3) = -e_1 - e_2$. **Ainsi**, $w(x, y, z) = (x - z, y - z, 0)$.

Vérifions : $\text{Im } w = \text{Vect}(e_1, e_2)$ est le plan $z = 0$. Par le théorème du rang, $\dim \ker w = 1$, et $k \in \ker w$. Donc $\ker w = \text{Vect}(k)$.

4. Si $\ker f = \text{Im } f$, le théorème du rang donne $3 = 2 \dim \ker f$. C'est impossible, car 3 est impair. **Aucun endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ n'a un noyau égal à son image.**

Corrigé de l'exercice 9 : Image directe et image réciproque

1. Soit $y \in f(A + A')$. Alors $y = f(a + a') = f(a) + f(a')$, avec $a \in A$ et $a' \in A'$. Donc $y \in f(A) + f(A')$. Réciproquement, un élément $f(a) + f(a')$ de $f(A) + f(A')$ s'écrit $f(a + a')$. **Ainsi**, $f(A + A') = f(A) + f(A')$.
2. Soit $x = a + k$ avec $a \in A$ et $k \in \ker f$. Alors $f(x) = f(a) \in f(A)$, donc $x \in f^{-1}(f(A))$. Réciproquement, si $f(x) \in f(A)$, il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$.

. Alors $k = x - a$ vérifie $f(k) = 0$, et $x = a + k$. **Donc** $f^{-1}(f(A)) = A + \ker f$.

- Si $y = f(x)$ avec $f(x) \in B$, alors $y \in B$ et $y \in \operatorname{Im} f$. Réciproquement, si $y \in B \cap \operatorname{Im} f$, on écrit $y = f(x)$. Alors $f(x) \in B$, donc $x \in f^{-1}(B)$. **Ainsi**, $f(f^{-1}(B)) = B \cap \operatorname{Im} f$.
- Le noyau vérifie $x = -y$ et $z = -y$. Donc $\ker f = \operatorname{Vect}((1, -1, 1))$. Ensuite, $f(e_1) = (1, 0)$, d'où $f(A) = \operatorname{Vect}((1, 0))$. D'après la question 2, $f^{-1}(f(A)) = \operatorname{Vect}((1, 0, 0), (1, -1, 1))$. On retrouve ce résultat directement : $f(x, y, z) \in \operatorname{Vect}((1, 0))$ équivaut à $y + z = 0$. Enfin, $f(x, y, z) \in \operatorname{Vect}((1, 1))$ équivaut à $x + y = y + z$, soit $x = z$. **Donc** $f^{-1}(f(A))$ est le plan $y + z = 0$, et $f^{-1}(B)$ est le plan $x = z$.

Corrigé de l'exercice 10 : Noyaux et images sur les matrices carrées

- La transposition est linéaire, donc φ l'est aussi. Ensuite, $\varphi(M) = 0$ équivaut à $M^T = M$. Donc $\ker \varphi = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, de dimension 3. Le théorème du rang donne $\operatorname{rg} \varphi = 4 - 3 = 1$. Par ailleurs, $(M - M^T)^T = M^T - M = -(M - M^T)$. Donc $\operatorname{Im} \varphi$ est contenue dans l'espace $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques. Cet espace est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. **Par égalité des dimensions**, $\operatorname{Im} \varphi = \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$.
- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors $AM = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$. Ce produit est nul si et seulement si $c = -a$ et $d = -b$. **Donc** $\ker \psi = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} \right\}$, de **dimension 2**. Ensuite, $\operatorname{Im} \psi$ est contenue dans l'ensemble des matrices à deux lignes égales, de dimension 2. Le rang vaut $4 - 2 = 2$. **Donc** $\operatorname{Im} \psi = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \right\}$, de **dimension 2**.
- On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2A$. Par conséquent, $\psi^2(M) = A^2 M = 2AM$, soit $\psi^2 = 2\psi$. Posons $\pi = \frac{1}{2}\psi$. Alors $\pi^2 = \frac{1}{4}\psi^2 = \frac{1}{2}\psi = \pi$. **Donc** π est la projection sur $\operatorname{Im} \psi$ parallèlement à $\ker \psi$.

Corrigé de l'exercice 11 : Dérivation et multiplication par X

1. Tout polynôme $Q = \sum a_k X^k$ admet pour antécédent $\sum \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$. Donc D est surjective. En revanche, $D(1) = 0$ avec $1 \neq 0$. Ainsi, D est surjective et non injective.
2. Si $XP = 0$, alors $P = 0$, car $\deg(XP) = \deg P + 1$ dès que $P \neq 0$. De plus, tout polynôme XP s'annule en 0, donc 1 n'a pas d'antécédent. Ainsi, T est injective et non surjective.
3. Pour tout P , on a $D(T(P)) = (XP)' = P + XP'$ et $T(D(P)) = XP'$. La différence vaut P . Donc $D \circ T - T \circ D = \text{id}_E$, et $\mathcal{L}(E)$ n'est pas commutatif puisque $D \circ T \neq T \circ D$.
4. On a $D \circ T(X^k) = (k+1)X^k$. Soit S l'endomorphisme défini sur la base canonique par $S(X^k) = \frac{X^k}{k+1}$. Alors $S \circ (D \circ T)$ et $(D \circ T) \circ S$ valent l'identité sur chaque X^k , donc partout. Ainsi, $D \circ T$ est un automorphisme, d'inverse $X^k \rightarrow \frac{X^k}{k+1}$.
5. On a $T \circ D(X^k) = kX^k$. Pour $P = \sum a_k X^k$, on obtient $T \circ D(P) = \sum k a_k X^k$. Il est nul si et seulement si $a_k = 0$ pour tout $k \geq 1$. Donc $\ker(T \circ D) = \mathbb{R}_0[X]$ et $\text{Im}(T \circ D) = \{P \mid P(0) = 0\}$. Aucune contradiction : l'équivalence entre injectivité et surjectivité exige la dimension finie, et $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie. Les questions 1 et 2 en donnent des contre-exemples.

Corrigé de l'exercice 12 : Injectivité et bijectivité sur les polynômes

1. Si $\deg P \leq n$, alors $\deg P(X+1) \leq n$, donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. De plus, $(\lambda P + Q)(X+1) = \lambda P(X+1) + Q(X+1)$. Donc φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P \neq 0$, de degré d et de coefficient dominant a_d . Le polynôme $P(X+1)$ a le même terme dominant $a_d X^d$. Par conséquent, $\varphi(P)$ a pour terme dominant $2a_d X^d$, qui est non nul. Donc $\ker \varphi = \{0\}$. Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, l'endomorphisme injectif φ est bijectif.

3. On cherche $P = aX^2 + bX + c$. On a

$$P(X+1) = aX^2 + (2a+b)X + (a+b+c). \text{ Donc}$$

$$\varphi(P) = 2aX^2 + (2a+2b)X + (a+b+2c). \text{ L'égalité avec } X^2 \text{ donne } a = \frac{1}{2}, \text{ puis } b = -\frac{1}{2} \text{ et } c = 0. \text{ L'unique solution est } P = \frac{X^2 - X}{2} = \frac{X(X-1)}{2}.$$

4. Pour tout entier k , on a $k^2 = P(k) + P(k+1)$. Donc

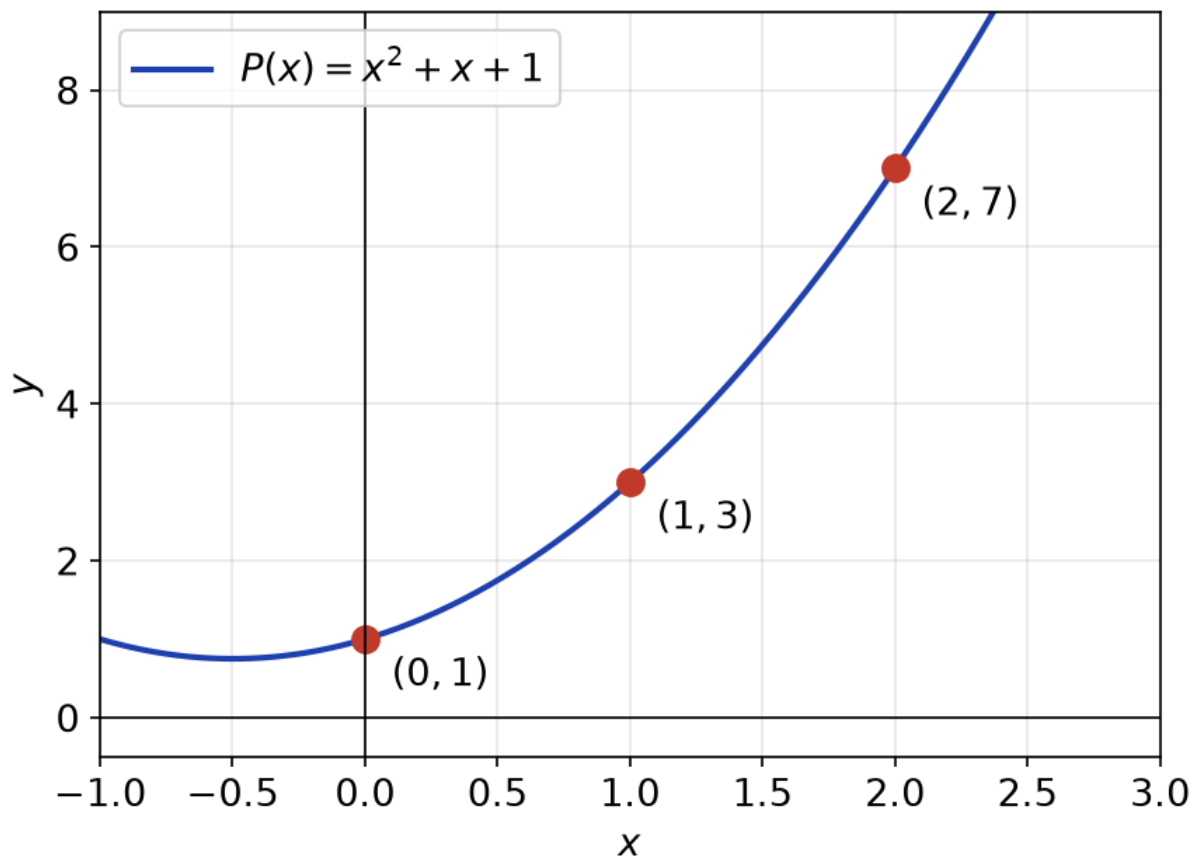
$$\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 = \sum_{k=0}^n (-1)^k P(k) - \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j P(j) = P(0) + (-1)^n P(n+1).$$

Or $P(0) = 0$ et $P(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}$. Ainsi, $\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$. Par exemple, pour $n = 3$, on trouve $0 - 1 + 4 - 9 = -6$.

Corrigé de l'exercice 13 : Interpolation de Lagrange par un isomorphisme

1. L'évaluation en un point est linéaire, donc φ est linéaire. Soit $P \in \ker \varphi$. Alors P admet les $n+1$ racines distinctes $a_0, \dots, a_n$, alors que $\deg P \leq n$. Donc $P = 0$, et φ est injective. De plus, $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$. **Par conséquent, φ est un isomorphisme.**
2. La surjectivité de φ donne l'existence d'un antécédent de $(b_0, \dots, b_n)$. Son injectivité donne l'unicité. **Il existe donc un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout i .**
3. On cherche $P = aX^2 + bX + c$. La condition $P(0) = 1$ donne $c = 1$. Ensuite, $P(1) = 3$ donne $a + b = 2$, et $P(2) = 7$ donne $4a + 2b = 6$, soit $2a + b = 3$. Par soustraction, $a = 1$, puis $b = 1$. **Le polynôme cherché est $P = X^2 + X + 1$.**
4. L'application $P \rightarrow P(a_0)$ est une forme linéaire non nulle, car elle envoie 1 sur 1. Son rang vaut donc 1. **Par le théorème du rang, son noyau est de dimension $(n+1) - 1 = n$.**

Comme le montre la figure ci-dessous, la parabole obtenue passe bien par les trois points imposés.



Corrigé de l'exercice 14 : Supplémentaire du noyau et forme géométrique du rang

1. Le noyau vérifie $x = y$ et $x + y + z = 0$, donc $z = -2x$. Ainsi, $\ker g = \text{Vect}((1, 1, -2))$. Le théorème du rang donne $\text{rg } g = 3 - 1 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$.
Donc g est surjective, de rang 2.
2. Le vecteur $(1, 1, -2)$ a une troisième coordonnée non nulle, donc il n'est pas dans S . Ainsi $S \cap \ker g = \{0\}$. De plus, $\dim S + \dim \ker g = 3$. **Par conséquent,**
 $\mathbb{R}^3 = S \oplus \ker g$.
3. La restriction s'écrit $(x, y, 0) \rightarrow (x + y, x - y)$. On résout $x + y = a$ et $x - y = b$:
 $x = \frac{a+b}{2}$ et $y = \frac{a-b}{2}$. La solution existe et est unique. **Donc $g|_S$ est un isomorphisme, d'inverse** $(a, b) \rightarrow \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}, 0\right)$.
4. Le vecteur $(1, 1, -2)$ a une deuxième coordonnée non nulle, donc il n'est pas dans S' . Comme à la question 2, S' est un supplémentaire de $\ker g$. La restriction s'écrit

$(x, 0, z) \rightarrow (x + z, x)$. On résout $x = b$ et $z = a - b$. **Donc** $g|_{S'}$ **est un isomorphisme, d'inverse** $(a, b) \rightarrow (b, 0, a - b)$. À retenir : le supplémentaire du noyau n'est pas unique, mais tous sont isomorphes à l'image. C'est la forme géométrique du théorème du rang.

Corrigé de l'exercice 15 : Endomorphisme de carré nul

1. Soit $y = f(x) \in \text{Im } f$. Alors $f(y) = f^2(x) = 0$. **Donc** $\text{Im } f \subset \ker f$.
2. D'après la question 1, $\text{rg } f \leq \dim \ker f$. Le théorème du rang donne $\text{rg } f + \dim \ker f = 3$. Donc $2 \text{rg } f \leq 3$, soit $\text{rg } f \leq 1$. Comme $f \neq 0$, on a $\text{rg } f \geq 1$. **Ainsi, $\text{rg } f = 1$ et $\dim \ker f = 2$.**
3. Pour $f(x, y, z) = (z, 0, 0)$, on a $f(f(x, y, z)) = f(z, 0, 0) = (0, 0, 0)$. Le noyau est le plan $z = 0$, et l'image est la droite $\text{Vect}(e_1)$. **On a bien $\text{rg } f = 1$, $\dim \ker f = 2$ et $\text{Im } f \subset \ker f$.**
4. Comme $u \notin \ker f$, on a $f(u) \neq 0$. De plus, $f(u) \in \text{Im } f \subset \ker f$. On complète la famille libre $(f(u))$ en une base $(f(u), v)$ de $\ker f$, qui est de dimension 2. Montrons que $(u, f(u), v)$ est libre. Supposons $a u + b f(u) + c v = 0$. En appliquant f , on obtient $a f(u) = 0$, car $f^2(u) = 0$ et $f(v) = 0$. Donc $a = 0$. Il reste $b f(u) + c v = 0$, d'où $b = c = 0$. **La famille libre $(u, f(u), v)$ a 3 vecteurs : c'est une base de $\mathbb{R}^3$.**

Corrigé de l'exercice 16 : Anneau $L(E)$ et polynôme annulateur

1. Posons $p_1(x, y) = (x, 0)$, $p_2(x, y) = (0, y)$ et $\sigma(x, y) = (y, x)$. D'une part, $p_1 \circ \sigma(x, y) = (y, 0)$. D'autre part, $\sigma \circ p_1(x, y) = (0, x)$. Ces applications diffèrent. **Donc p_1 et σ ne commutent pas, et $p_1 \circ p_2 = 0$ avec $p_1 \neq 0$ et $p_2 \neq 0$.**
2. On a $f^2 - 3f = -2 \text{id}_E$, donc $f \circ (3 \text{id}_E - f) = 2 \text{id}_E$. Les deux facteurs commutent, car ce sont des polynômes en f . Ainsi, $f \circ \frac{1}{2}(3 \text{id}_E - f) = \frac{1}{2}(3 \text{id}_E - f) \circ f = \text{id}_E$. **Donc $f \in \text{GL}(E)$ et $f^{-1} = \frac{3}{2} \text{id}_E - \frac{1}{2} f$.**

3. On calcule $(f - \text{id}_E)^2 = f^2 - 2f + \text{id}_E$. Or $f^2 = 3f - 2\text{id}_E$. Donc $(f - \text{id}_E)^2 = f - \text{id}_E$. **Ainsi, $f - \text{id}_E$ est un projecteur.**
4. Posons $p = f - \text{id}_E$. C'est un projecteur, donc $E = \ker p \oplus \text{Im } p$, avec $\ker p = \ker(f - \text{id}_E)$. De plus, $\text{Im } p = \ker(p - \text{id}_E) = \ker(f - 2\text{id}_E)$. **Donc $E = \ker(f - \text{id}_E) \oplus \ker(f - 2\text{id}_E)$.** Concrètement, tout x s'écrit $x = (2x - f(x)) + (f(x) - x)$.
5. On a $f^2(x, y) = f(x, x + 2y) = (x, 3x + 4y)$. Par ailleurs, $3f(x, y) - 2(x, y) = (x, 3x + 4y)$. L'hypothèse est donc vérifiée. Ensuite, $f(x, y) = (x, y)$ équivaut à $x + y = 0$, et $f(x, y) = 2(x, y)$ équivaut à $x = 0$. **Donc $\ker(f - \text{id}) = \text{Vect}((1, -1))$ et $\ker(f - 2\text{id}) = \text{Vect}((0, 1))$.**

Corrigé de l'exercice 17 : Rang d'une composée

1. D'une part, $\text{Im}(g \circ f) = g(\text{Im } f) \subset \text{Im } g$, donc $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg } g$. D'autre part, $g(\text{Im } f)$ est l'image de l'espace $\text{Im } f$ par une application linéaire. Sa dimension est donc au plus $\dim \text{Im } f$. **Ainsi, $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg } f, \text{rg } g)$.**
2. Si g est injective, sa restriction à $\text{Im } f$ est injective. Elle réalise donc un isomorphisme de $\text{Im } f$ sur $g(\text{Im } f)$, d'où $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg } f$. Si f est surjective, alors $\text{Im}(g \circ f) = g(F) = \text{Im } g$. **Le rang est donc invariant par composition avec une injection à gauche ou une surjection à droite, en particulier avec un isomorphisme.**
3. Notons g' la restriction de g à $\text{Im } f$. Son image est $\text{Im}(g \circ f)$, et son noyau est $\ker g \cap \text{Im } f$. Le théorème du rang donne $\text{rg } f = \dim(\ker g \cap \text{Im } f) + \text{rg}(g \circ f)$. Or $\dim(\ker g \cap \text{Im } f) \leq \dim \ker g = \dim F - \text{rg } g$. **Donc $\text{rg}(g \circ f) \geq \text{rg } f + \text{rg } g - \dim F$.**
4. On applique la question 3 avec $f = g = h$ et $F = E$. On obtient $0 = \text{rg}(h \circ h) \geq 2 \text{rg } h - n$. **Donc $\text{rg } h \leq \frac{n}{2}$.** On retrouve le résultat de l'exercice 15 pour $n = 3$.

Corrigé de l'exercice 18 : Noyau et image de f et de f au carré

1. Si $f(x) = 0$, alors $f^2(x) = f(0) = 0$. Ensuite, $f^2(x) = f(f(x)) \in \text{Im } f$. **Donc** $\ker f \subset \ker f^2$ **et** $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$.
2. Le théorème du rang donne $\dim \ker f + \text{rg } f = n = \dim \ker f^2 + \text{rg } f^2$. Avec les inclusions de la question 1, $\ker f = \ker f^2$ équivaut à $\dim \ker f = \dim \ker f^2$. Cela équivaut à $\text{rg } f = \text{rg } f^2$, puis à $\text{Im } f = \text{Im } f^2$. **Les deux égalités sont donc équivalentes.**
3. Supposons $\ker f = \ker f^2$. Soit $x \in \ker f \cap \text{Im } f$, avec $x = f(y)$. Alors $f^2(y) = f(x) = 0$, donc $y \in \ker f^2 = \ker f$, et $x = f(y) = 0$. Réciproquement, supposons $\ker f \cap \text{Im } f = \{0\}$. Soit $x \in \ker f^2$. Alors $f(x) \in \text{Im } f$ et $f(f(x)) = 0$, donc $f(x) \in \ker f \cap \text{Im } f$. Ainsi $f(x) = 0$. **Donc** $\ker f = \ker f^2$ **si et seulement si** $\ker f \cap \text{Im } f = \{0\}$.
4. Par le théorème du rang, $\dim \ker f + \dim \text{Im } f = n$. Dans ce cas, une somme directe est égale à E dès que l'intersection est nulle. **Donc les conditions précédentes équivalent à** $E = \ker f \oplus \text{Im } f$.
5. Pour φ de l'exercice 3, on a vu que $\ker \varphi = \text{Vect}(X)$ et $\text{Im } \varphi = \text{Vect}(1, X^2)$ sont supplémentaires. De plus, $\varphi^2(a + bX + cX^2) = a + cX^2$, donc $\ker \varphi^2 = \text{Vect}(X) = \ker \varphi$. En revanche, pour la dérivation D sur $\mathbb{R}_1[X]$, on a $\ker D = \text{Im } D = \mathbb{R}_0[X]$, et $D^2 = 0$. **Dans ce second cas,** $\ker D \neq \ker D^2 = \mathbb{R}_1[X]$, **et la somme n'est pas directe.**

Corrigé de l'exercice 19 : Somme de deux projecteurs

1. Développons, en prenant garde à l'ordre des facteurs :
 $(p + q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + 0 + 0 + q$. **Donc** $p + q$ **est un projecteur.**
2. Si $(p + q)^2 = p + q$, le même développement donne $p \circ q + q \circ p = 0$. En composant à gauche par p , on obtient $p \circ q + p \circ q \circ p = 0$. En composant à droite par p , on obtient $p \circ q \circ p + q \circ p = 0$. Par soustraction, $p \circ q = q \circ p$. Enfin, la relation de départ devient $2 p \circ q = 0$. **Donc** $p \circ q = q \circ p = 0$.

3. D'abord, $\text{Im}(p + q) \subset \text{Im } p + \text{Im } q$. Réciproquement, soit $y = p(a) + q(b)$. Alors $(p + q)(y) = p(a) + p(q(b)) + q(p(a)) + q(b) = y$. Donc $y \in \text{Im}(p + q)$. La somme est directe : si $x \in \text{Im } p \cap \text{Im } q$, alors $x = p(x) = p(q(x)) = 0$. Ensuite, $\ker p \cap \ker q \subset \ker(p + q)$ est clair. Si $(p + q)(x) = 0$, on applique p : $p(x) + p(q(x)) = p(x) = 0$. De même, $q(x) = 0$. **Donc** $\text{Im}(p + q) = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$ **et** $\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q$.

Point de méthode : dans $\mathcal{L}(E)$, on ne simplifie jamais $p \circ q + q \circ p$ en $2 p \circ q$ sans avoir prouvé la commutation.

Corrigé de l'exercice 20 : Commutation avec un projecteur

- Supposons $f \circ p = p \circ f$. Si $x \in \text{Im } p$, alors $p(f(x)) = f(p(x)) = f(x)$, donc $f(x) \in \text{Im } p$. Si $x \in \ker p$, alors $p(f(x)) = f(p(x)) = 0$, donc $f(x) \in \ker p$. Réciproquement, supposons les deux sous-espaces stables. Écrivons $x = a + b$, avec $a \in \text{Im } p$ et $b \in \ker p$. Alors $f(p(x)) = f(a)$. De plus, $p(f(x)) = p(f(a)) + p(f(b)) = f(a) + 0$. **Donc** $f \circ p = p \circ f$ **si et seulement si** $\text{Im } p$ **et** $\ker p$ **sont stables par** f .
- Ici, $\text{Im } p = \text{Vect}((2, 1))$ et $\ker p = \text{Vect}((1, 1))$. Une droite est stable par f si et seulement si l'image de son vecteur directeur lui est colinéaire. Donc f commute avec p si et seulement si $f(2, 1) = \alpha(2, 1)$ et $f(1, 1) = \beta(1, 1)$. Or $(x, y) = (x - y)(2, 1) + (-x + 2y)(1, 1)$. **Donc** $f(x, y) = ((2\alpha - \beta)x + (2\beta - 2\alpha)y, (\alpha - \beta)x + (2\beta - \alpha)y)$, **avec** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- La question précédente montre que $f = \alpha p + \beta(\text{id} - p)$. En effet, $p(x, y) = (x - y)(2, 1)$ et $(\text{id} - p)(x, y) = (-x + 2y)(1, 1)$. L'ensemble cherché est donc $\text{Vect}(p, \text{id} - p)$. Ces deux projecteurs sont non nuls et d'images distinctes, donc non colinéaires. **C'est un sous-espace de** $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ **de dimension 2**.

Corrigé de l'exercice 21 : Applications linéaires nulles sur un

sous-espace

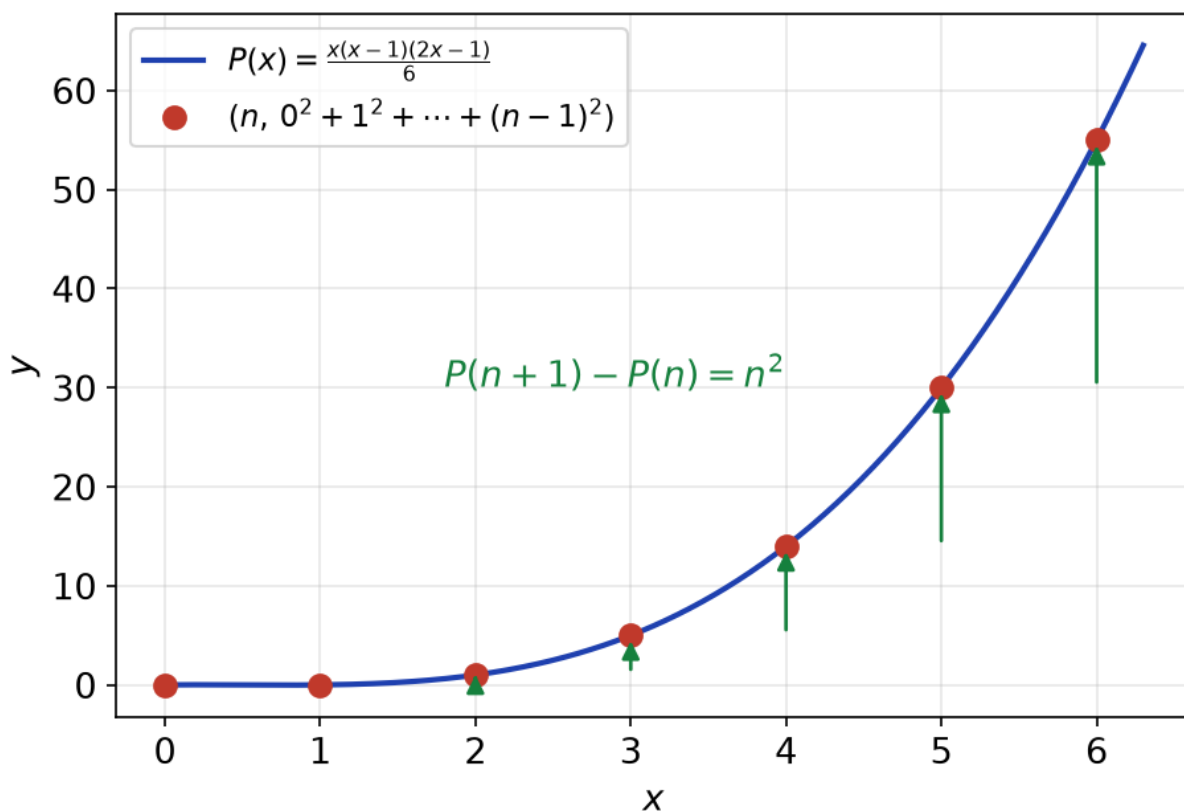
1. L'application nulle appartient à W . Si $f, g \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors pour tout $a \in A$, $(\lambda f + g)(a) = 0$. **Donc W est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.**
2. La restriction est linéaire. Elle est injective : si $f \in W$ et $f|_B = 0$, alors f est nulle sur A et sur B , donc sur $A + B = E$. Elle est surjective : soit $g \in \mathcal{L}(B, F)$. On pose $f(a + b) = g(b)$ pour $a \in A$ et $b \in B$. Cette définition a un sens car la décomposition est unique. De plus, f est linéaire, nulle sur A , et $f|_B = g$. **Donc ρ est un isomorphisme.**
3. On a $\dim B = n - k$. **Par conséquent,** $\dim W = \dim \mathcal{L}(B, F) = (n - k)m$.
4. Ici, $n = 3$, $k = 1$ et $m = 2$, donc la dimension vaut $2 \times 2 = 4$. On prend $B = \text{Vect}(e_1, e_2)$: f est déterminée par $f(e_1)$ et $f(e_2)$, puis $f(e_3) = -f(e_1) - f(e_2)$. **Une base est formée des applications** $(x - z, 0)$, $(y - z, 0)$, $(0, x - z)$ **et** $(0, y - z)$.

Corrigé de l'exercice 22 : Problème : l'opérateur de différence et la somme des carrés

1. La linéarité vient de $(\lambda P + Q)(X + 1) = \lambda P(X + 1) + Q(X + 1)$. De plus, $\deg \Delta(P) \leq 3$ si $\deg P \leq 3$. On calcule ensuite : $\Delta(1) = 0$, $\Delta(X) = 1$, $\Delta(X^2) = 2X + 1$. **Enfin,** $\Delta(X^3) = (X + 1)^3 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1$.
2. Soit $P = a_d X^d + \dots$, avec $a_d \neq 0$ et $d \geq 1$. Par la formule du binôme, $(X + 1)^d - X^d = d X^{d-1} + \dots$. Les termes de degré inférieur de P donnent des différences de degré au plus $d - 2$. **Donc $\Delta(P)$ a pour terme dominant $d a_d X^{d-1}$, et $\deg \Delta(P) = d - 1$.**
3. Les constantes sont dans le noyau. Réciproquement, si $\deg P \geq 1$, la question 2 montre que $\Delta(P) \neq 0$. **Donc $\ker \Delta = \mathbb{R}_0[X]$.**
4. Le théorème du rang donne $\text{rg } \Delta = 4 - 1 = 3$. De plus, la question 2 montre que $\text{Im } \Delta \subset \mathbb{R}_2[X]$, espace de dimension 3. **Par égalité des dimensions,** $\text{Im } \Delta = \mathbb{R}_2[X]$.

5. Comme $X^2 \in \text{Im } \Delta$, il existe P_0 tel que $\Delta(P_0) = X^2$. Le polynôme $P = P_0 - P_0(0)$ convient, car Δ annule les constantes. Pour l'unicité, deux solutions diffèrent d'un élément de $\ker \Delta$, donc d'une constante, nulle car les deux s'annulent en 0. Cherchons $P = aX^3 + bX^2 + cX$. D'après la question 1, $\Delta(P) = 3aX^2 + (3a + 2b)X + (a + b + c)$. On obtient $a = \frac{1}{3}$, puis $b = -\frac{1}{2}$, puis $c = \frac{1}{6}$. **Donc** $P = \frac{2X^3 - 3X^2 + X}{6} = \frac{X(X-1)(2X-1)}{6}$.
6. Pour tout entier k , on a $P(k+1) - P(k) = k^2$. Par télescopage, $\sum_{k=0}^n k^2 = P(n+1) - P(0) = P(n+1)$. **Donc** $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
7. On a $\Delta^2(X^3) = \Delta(3X^2 + 3X + 1) = 3(2X + 1) + 3 = 6X + 6$, puis $\Delta^3(X^3) = 6$. Donc $\Delta^3 \neq 0$. Ensuite, chaque application de Δ fait baisser le degré d'une unité, ou donne 0. Par conséquent, $\Delta^4(P) = 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Enfin, $\text{Im } \Delta^2 = \Delta(\text{Im } \Delta) = \Delta(\mathbb{R}_2[X]) = \mathbb{R}_1[X]$, d'après la question 2 appliquée à 1, X et X^2 . **Ainsi**, $\Delta^4 = 0$, $\Delta^3 \neq 0$ et $\text{rg } \Delta^2 = 2$.

La figure ci-dessous illustre la question 6. Les points $(n, 0^2 + \dots + (n-1)^2)$ sont sur la courbe de P , et chaque saut vertical vaut un carré.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [applications linéaires, cours de maths sup](#)
- Les énoncés : [exercices de maths sup sur applications linéaires](#)
- À maîtriser avant : [Espaces vectoriels de dimension finie](#)
- Chapitre précédent : [Espaces vectoriels de dimension finie](#)
- Chapitre suivant : [Formes linéaires, hyperplans et sous-espaces affines](#)
- Le même thème en L1 : [applications linéaires, exercices de maths en L1](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)