

Applications linéaires

Corrigé de l'exercice 1 : Linéaire ou non linéaire

1. Soient $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z')$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La première coordonnée de $f_1(\lambda u + \mu v)$ vaut $(\lambda x + \mu x') - 2(\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z')$, soit $\lambda(x - 2y + z) + \mu(x' - 2y' + z')$. De même, la seconde vaut $3\lambda y + 3\mu y'$. Donc $f_1(\lambda u + \mu v) = \lambda f_1(u) + \mu f_1(v)$. **L'application f_1 est linéaire.**
2. On a $f_2(0, 0) = (0, 1) \neq (0, 0)$. Or une application linéaire envoie le vecteur nul sur le vecteur nul. **Donc f_2 n'est pas linéaire.**
3. D'une part, $f_3(2 \cdot (1, 1)) = f_3(2, 2) = 4$. D'autre part, $2 f_3(1, 1) = 2$. L'homogénéité est donc en défaut. **L'application f_3 n'est pas linéaire.**
4. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La dérivation est linéaire, et l'évaluation en un point aussi. Ainsi,
$$f_4(\lambda P + \mu Q) = \lambda P(2) + \mu Q(2) - \lambda P'(0) - \mu Q'(0) = \lambda f_4(P) + \mu f_4(Q).$$
L'application f_4 est une forme linéaire.
5. D'abord, si g est continue, alors $x \rightarrow x g(x)$ est continue comme produit de fonctions continues. Donc f_5 est bien à valeurs dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Ensuite, pour tout x , on a
$$x(\lambda g + \mu h)(x) = \lambda x g(x) + \mu x h(x).$$
Donc
$$f_5(\lambda g + \mu h) = \lambda f_5(g) + \mu f_5(h).$$
L'application f_5 est linéaire, de l'espace dans lui-même : c'est un endomorphisme.
6. On a $\det I_2 = 1$ et $\det(2 I_2) = 4 \neq 2 \det I_2$. **Le déterminant n'est pas une application linéaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.**

Point de méthode : tester $f(0)$ puis $f(2x)$ élimine la plupart des applications non linéaires en une ligne.

Corrigé de l'exercice 2 : Différence finie sur les polynômes de degré 2

1. Si $\deg P \leq 2$, alors $\deg P(X+1) \leq 2$. Donc $u(P) \in \mathbb{R}_2[X]$. Ensuite, pour P, Q et λ, μ réels, la composition par $X+1$ est linéaire :
 $(\lambda P + \mu Q)(X+1) = \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1)$. Par différence,
 $u(\lambda P + \mu Q) = \lambda u(P) + \mu u(Q)$. **Ainsi, u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.**
2. On calcule $u(1) = 1 - 1 = 0$, puis $u(X) = (X+1) - X = 1$. Enfin,
 $u(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$. **On obtient $u(1) = 0$, $u(X) = 1$ et $u(X^2) = 2X + 1$.**
3. Soit $P = a + bX + cX^2$. Par linéarité,
 $u(P) = b \cdot 1 + c(2X + 1) = (b + c) + 2cX$. Donc $u(P) = 0$ équivaut à
 $b + c = 0$ et $2c = 0$, c'est-à-dire $b = c = 0$. Par conséquent, $\ker u = \mathbb{R}_0[X]$, de base (1) .

L'image est engendrée par les images de la base $(1, X, X^2)$. Donc
 $\text{Im } u = \text{Vect}(0, 1, 2X + 1) = \text{Vect}(1, 2X + 1)$. Or $X = \frac{1}{2}((2X + 1) - 1)$, donc cet espace contient 1 et X . **Finalement, $\ker u = \mathbb{R}_0[X]$ et $\text{Im } u = \mathbb{R}_1[X]$, de base $(1, X)$.**
4. On a $\dim \ker u + \text{rg } u = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$, conformément au théorème du rang. Le noyau n'est pas réduit à $\{0\}$, donc u n'est pas injectif. De plus, $X^2 \notin \text{Im } u$.
L'endomorphisme u n'est ni injectif ni surjectif.

Corrigé de l'exercice 3 : Noyau et image d'un endomorphisme de l'espace

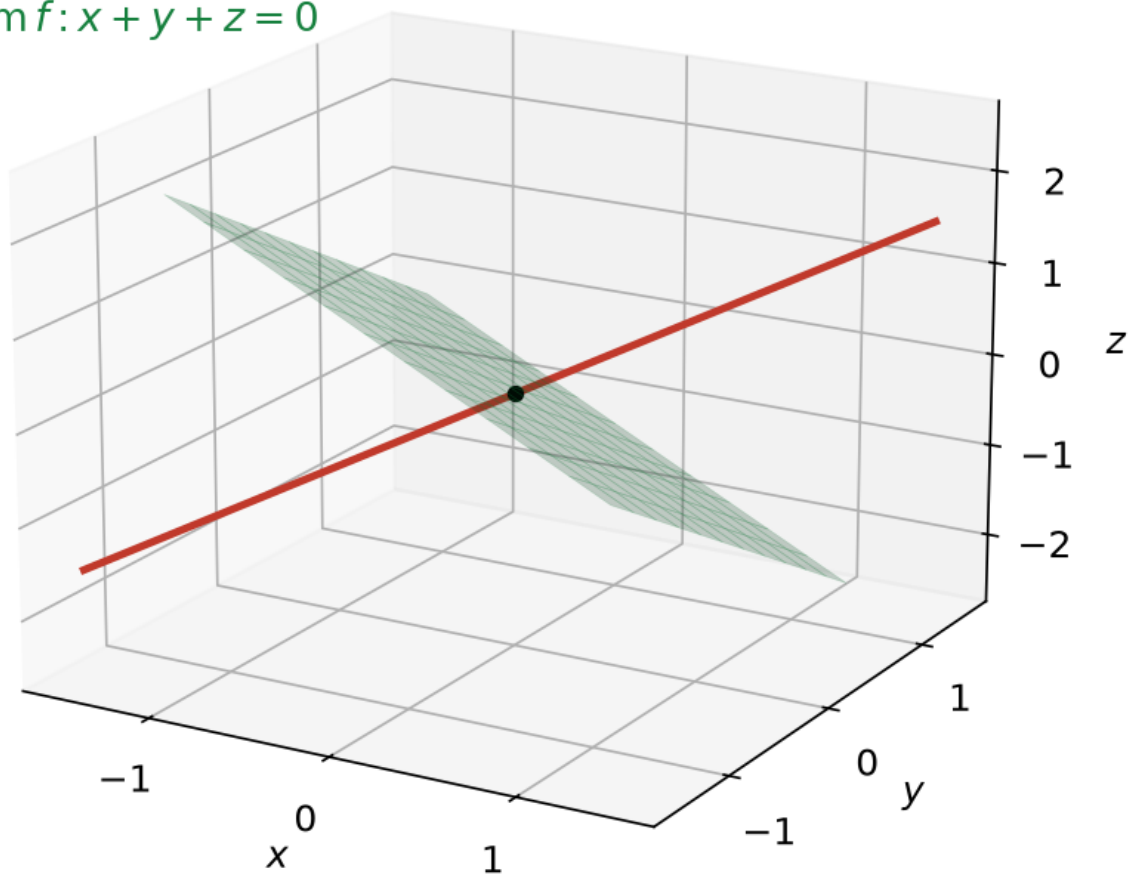
1. Chaque coordonnée de $f(x, y, z)$ est une combinaison linéaire de x, y et z . Pour u, v et λ, μ , on vérifie donc coordonnée par coordonnée que $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.
Ainsi, f est linéaire.
2. On résout $f(x, y, z) = 0$, soit $x - y = 0$, $y - z = 0$ et $z - x = 0$. Ce système

équivalent à $x = y = z$. Donc $\ker f = \text{Vect}((1, 1, 1))$, et $((1, 1, 1))$ en est une base.

3. Pour tout (x, y, z) , la somme des coordonnées de $f(x, y, z)$ vaut $(x - y) + (y - z) + (z - x) = 0$. Donc $\text{Im } f \subset P$. Ensuite, le théorème du rang donne $\text{rg } f = 3 - \dim \ker f = 2$. Or P est un plan, donc $\dim P = 2$. Un sous-espace inclus dans P et de même dimension lui est égal. **Par conséquent**, $\text{Im } f = P$.
4. Soit $t(1, 1, 1)$ un vecteur de $\ker f$ qui appartient aussi à P . Alors $3t = 0$, donc $t = 0$. Ainsi, $\ker f \cap \text{Im } f = \{0\}$. De plus, $\dim \ker f + \dim \text{Im } f = 1 + 2 = 3$.
Donc $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \text{Im } f$. La figure ci-dessous montre la droite $\ker f$ qui perce le plan $\text{Im } f$ en l'origine seulement.

$$\ker f = \text{Vect}(1, 1, 1)$$

$$\text{Im } f : x + y + z = 0$$



Point de méthode : une inclusion et une égalité de dimensions suffisent pour prouver l'égalité de deux

sous-espaces de dimension finie.

Corrigé de l'exercice 4 : Injectivité et équation de l'image

1. L'application f est linéaire, car ses coordonnées sont linéaires en (x, y) . Résolvons $f(x, y) = 0$. Les équations $x + 2y = 0$ et $x - y = 0$ donnent, par différence, $3y = 0$. Donc $y = 0$, puis $x = 0$. Ainsi, $\ker f = \{0\}$. **D'après la caractérisation par le noyau, f est injective.**
2. Le théorème du rang donne $\operatorname{rg} f = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \ker f = 2$. Or $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. **Donc $\operatorname{rg} f = 2 < 3$, et f n'est pas surjective.**
3. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Ce vecteur est dans l'image si et seulement si le système $x + 2y = a$, $3x + 4y = b$, $x - y = c$ admet une solution. La première et la troisième équation donnent $3y = a - c$. Ainsi, $y = \frac{a-c}{3}$ et $x = c + y = \frac{a+2c}{3}$. Reportons dans la deuxième équation :

$$3x + 4y = (a + 2c) + \frac{4(a - c)}{3} = \frac{7a + 2c}{3}.$$

Le système est donc compatible si et seulement si $7a + 2c = 3b$. **Une équation de $\operatorname{Im} f$ est $7a - 3b + 2c = 0$.** On vérifie d'ailleurs que $f(1, 0) = (1, 3, 1)$ et $f(0, 1) = (2, 4, -1)$ satisfont cette équation.

4. Pour $(1, 1, -2)$, on trouve $7 - 3 - 4 = 0$. Ce vecteur appartient donc à l'image. Les formules précédentes donnent $y = \frac{1+2}{3} = 1$ et $x = \frac{1-4}{3} = -1$. On vérifie : $f(-1, 1) = (1, -3 + 4, -2) = (1, 1, -2)$. **L'unique antécédent est $(-1, 1)$; il est unique car f est injective.**

Corrigé de l'exercice 5 : Opérations sur deux endomorphismes

du plan

1. On calcule $f \circ g(x, y) = f(x, 0) = (0, x)$ et $g \circ f(x, y) = g(y, x) = (y, 0)$. Par exemple, en $(1, 0)$, on obtient $(0, 1)$ d'un côté et $(0, 0)$ de l'autre. **Ainsi, $f \circ g \neq g \circ f$: la composition n'est pas commutative.**
2. Par définition des opérations dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, on a $(2f - g)(x, y) = 2(y, x) - (x, 0)$. **Donc $(2f - g)(x, y) = (2y - x, 2x)$.**
3. D'abord, $f \circ f(x, y) = f(y, x) = (x, y)$, donc $f \circ f = \text{Id}$. Ensuite, $g \circ g(x, y) = g(x, 0) = (x, 0)$, donc $g \circ g = g$. La relation $f \circ f = \text{Id}$ montre que f est bijective. **Par conséquent, f est un automorphisme et $f^{-1} = f$.**
4. On a $h(x, y) = (0, x)$, donc $h \circ h(x, y) = h(0, x) = (0, 0)$. Ainsi, $h \circ h = 0$ alors que $h \neq 0$. **Dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, un produit de composition peut être nul sans qu'aucun facteur ne le soit.**

Corrigé de l'exercice 6 : Application définie par l'image d'une base

1. Cherchons a, b, c réels tels que $a u_1 + b u_2 + c u_3 = (x, y, z)$. Ce système s'écrit $a + b + c = x$, $b + c = y$ et $c = z$. Il est triangulaire, et sa solution unique est $c = z$, $b = y - z$, $a = x - y$. Chaque vecteur s'écrit donc de façon unique dans la famille. **La famille (u_1, u_2, u_3) est une base, et $(x, y, z) = (x - y) u_1 + (y - z) u_2 + z u_3$.**
2. Le théorème de détermination par l'image d'une base assure l'existence et l'unicité de f . Par linéarité, on obtient :

$$f(x, y, z) = (x - y)(1, 2) + (y - z)(0, 1) + z(3, 1).$$

En développant, la première coordonnée vaut $x - y + 3z$. La seconde vaut $2x - 2y + y - z + z = 2x - y$. **Donc $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y + 3z \\ 2x - y \end{pmatrix}$.** On contrôle que

$$f(1, 1, 1) = (3, 1) .$$

3. L'image contient $(1, 2)$ et $(0, 1)$, qui ne sont pas colinéaires. Donc $\text{rg } f = 2$, et f est surjective. Le théorème du rang donne $\dim \ker f = 3 - 2 = 1$. Or

$$f(3, 6, 1) = (3 - 6 + 3, 6 - 6) = (0, 0) . \text{ Donc } \text{rg } f = 2 \text{ et } \ker f = \text{Vect}((3, 6, 1)) .$$

4. On remarque que $(3, 2) = (1, 1) + (2, 1)$. Si g était linéaire, on aurait

$$g(3, 2) = g(1, 1) + g(2, 1) = (1, 0) + (0, 1) = (1, 1) . \text{ Or on impose } g(3, 2) = (1, 2) .$$

Une telle application linéaire n'existe pas. En effet, les trois vecteurs imposés ne forment pas une base, donc leurs images ne sont pas libres de choix.

Corrigé de l'exercice 7 : Théorème du rang en dimension 4

1. On obtient $f(e_1) = (1, 1, 2)$, $f(e_2) = (1, -1, 0)$, $f(e_3) = (1, 1, 2)$ et $f(e_4) = (1, -1, 0)$. Donc $\text{Im } f = \text{Vect}((1, 1, 2), (1, -1, 0))$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. **Par conséquent**, $\text{rg } f = 2$.

2. Le théorème du rang donne $\dim \ker f = 4 - 2 = 2$. Résolvons maintenant

$$f(x, y, z, t) = 0 . \text{ La troisième équation donne } z = -x . \text{ La première devient alors } y + t = 0 , \text{ et la deuxième } -y - t = 0 , \text{ qui est la même. Ainsi,}$$

$$\ker f = \{(x, y, -x, -y)\} . \text{ Une base de } \ker f \text{ est } ((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1)) : \text{ ces deux vecteurs engendrent le noyau, et ils sont libres.}$$

3. Les deux générateurs vérifient la relation $c = a + b$. En effet, $2 = 1 + 1$ et $0 = 1 - 1$. Le plan d'équation $c = a + b$ contient donc $\text{Im } f$, et il est de dimension $2 = \text{rg } f$. **Donc** $\text{Im } f$ a pour équation $c = a + b$, et f n'est pas surjective : par exemple, $(0, 0, 1)$ n'est pas atteint.

Corrigé de l'exercice 8 : Un endomorphisme de polynômes inversible

1. Si $\deg P \leq n$, alors $\deg P' \leq n-1$. Donc $P + P' \in \mathbb{R}_n[X]$. De plus, la dérivation est linéaire, donc $u = \text{Id} + D$ l'est aussi. **Ainsi, u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.**
2. Soit P non nul de degré d . On a $\deg P' < d$ (avec $P' = 0$ si $d = 0$). Donc $P + P'$ a le même terme dominant que P , et $\deg u(P) = d$. En particulier, $u(P) \neq 0$. **Par conséquent, $\ker u = \{0\}$.**
3. L'endomorphisme u est injectif, et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie $n+1$. D'après le corollaire du théorème du rang, un endomorphisme injectif en dimension finie est bijectif. **Donc u est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.**
4. Posons $P = aX^2 + bX + c$. Alors $P + P' = aX^2 + (b+2a)X + (c+b)$. L'égalité avec X^2 donne $a = 1$, puis $b = -2$, puis $c = 2$. **On trouve $P = X^2 - 2X + 2$.** On vérifie : $X^2 - 2X + 2 + 2X - 2 = X^2$.
5. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. On a :

$$u(v(Q)) = \sum_{k=0}^n (-1)^k Q^{(k)} + \sum_{k=0}^n (-1)^k Q^{(k+1)} = \sum_{k=0}^n (-1)^k Q^{(k)} - \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k Q^{(k)}.$$

Les termes d'indice 1 à n se simplifient. Il reste $Q - (-1)^{n+1} Q^{(n+1)}$. Or $Q^{(n+1)} = 0$ car $\deg Q \leq n$. Donc $u \circ v = \text{Id}$. Comme u est bijectif, on compose à gauche par u^{-1} . **Il vient $v = u^{-1}$.** Pour $n = 2$, on retrouve $v(X^2) = X^2 - 2X + 2$.

Corrigé de l'exercice 9 : Dimension infinie : les équivalences tombent

1. La dérivation est linéaire : $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$. De même, $X(\lambda P + \mu Q) = \lambda XP + \mu XQ$. **Ainsi, D et M sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$.**
2. Soit $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$. Le polynôme $P = \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{k+1} X^{k+1}$ vérifie $P' = Q$. Donc D est surjectif. En revanche, $D(1) = 0$, donc $\ker D \neq \{0\}$. **L'endomorphisme D est surjectif mais pas injectif** ; son noyau est l'ensemble des constantes.

3. Si $XP = 0$, alors $P = 0$: en effet, si $P \neq 0$, on aurait $\deg(XP) = \deg P + 1 \geq 1$. Donc M est injectif. De plus, tout polynôme XP s'annule en 0 . Par conséquent, le polynôme constant 1 n'est pas dans l'image. **L'endomorphisme M est injectif mais pas surjectif.**
4. On a $D(M(P)) = (XP)' = P + XP'$ et $M(D(P)) = XP'$. Donc $D \circ M - M \circ D = \text{Id}_{\mathbb{R}[X]}$.
5. La restriction D_n envoie $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$. Son noyau est $\mathbb{R}_0[X]$, de dimension 1 . Le théorème du rang donne donc $\text{rg } D_n = (n+1) - 1 = n$, et $\text{Im } D_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. **Ainsi, D_n n'est ni injectif ni surjectif.** C'est cohérent avec le cours : en dimension finie, un endomorphisme est injectif si et seulement s'il est surjectif. Les deux propriétés tombent donc ensemble. En dimension infinie, au contraire, D et M montrent que l'équivalence est fautive.

Corrigé de l'exercice 10 : Composée nulle et endomorphisme de carré nul

1. On a $g \circ f = 0$ si et seulement si $g(f(x)) = 0$ pour tout $x \in E$. Autrement dit, g s'annule sur tous les vecteurs de la forme $f(x)$. **Donc $g \circ f = 0 \Leftrightarrow \text{Im } f \subset \ker g$.**
2. Appliquons la question 1 avec $f = g = u$. On obtient $\text{Im } u \subset \ker u$, donc $\text{rg } u \leq \dim \ker u$. Le théorème du rang donne $\dim \ker u = n - \text{rg } u$. Ainsi, $\text{rg } u \leq n - \text{rg } u$. **Finalement, $\text{rg } u \leq \frac{n}{2}$.**
3. On calcule $u(u(x, y, z, t)) = u(z, t, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$. Donc $u \circ u = 0$. De plus, $\text{Im } u = \{(z, t, 0, 0)\} = \text{Vect}(e_1, e_2)$. **Ainsi, $\text{rg } u = 2 = \frac{4}{2}$: l'inégalité est une égalité.**
4. Pour $n = 3$, l'inégalité donne $\text{rg } u \leq \frac{3}{2}$. Comme le rang est entier, $\text{rg } u \leq 1$. **Il n'existe donc aucun endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de rang 2 et de carré nul.**

Corrigé de l'exercice 11 : Rang d'une composée

1. Pour tout $x \in E$, on a $g(f(x)) \in \text{Im } g$. Donc $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$. En passant aux dimensions, **on obtient** $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg } g$.
2. Notons $\tilde{g} : \text{Im } f \rightarrow G$ la restriction de g . Elle est linéaire. Son image est $g(\text{Im } f) = \{g(f(x)) \mid x \in E\} = \text{Im}(g \circ f)$. Le théorème du rang appliqué à $\tilde{g}$ donne :

$$\text{rg } f = \dim \text{Im } f = \dim \ker \tilde{g} + \text{rg}(g \circ f).$$

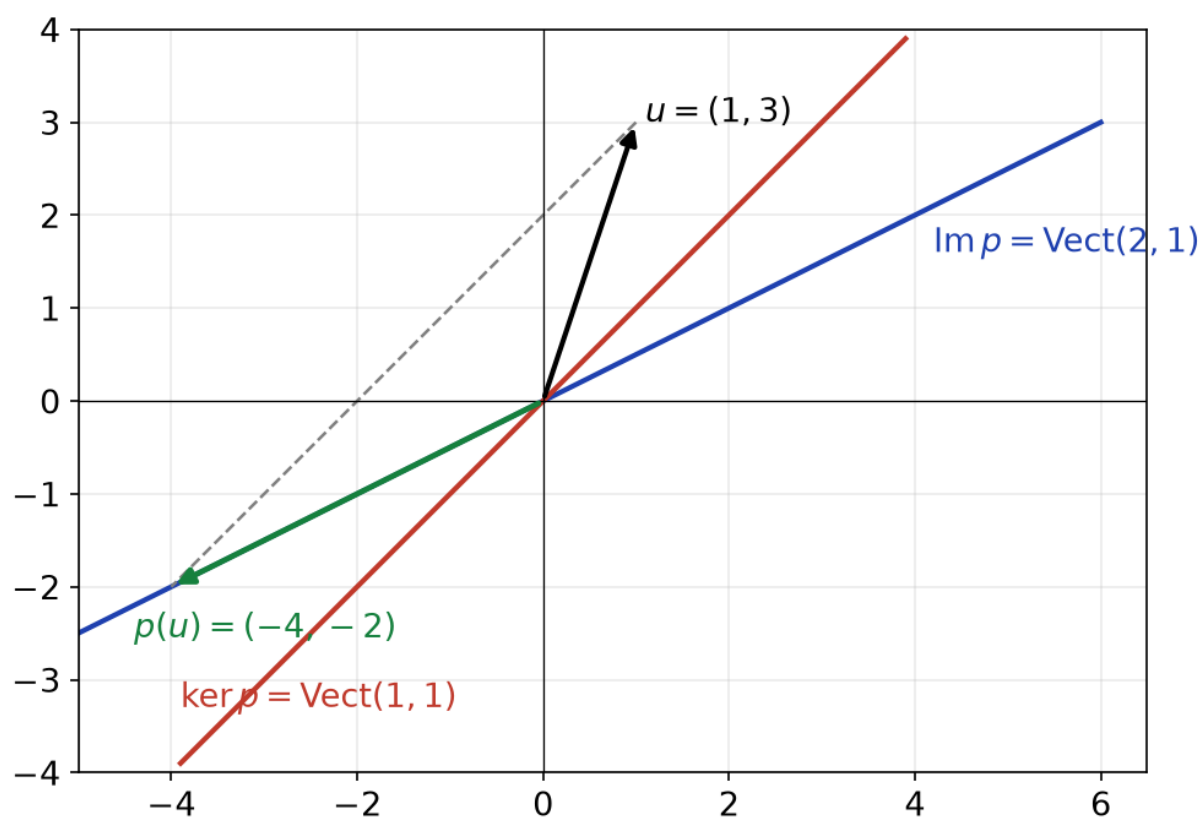
Par conséquent, $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg } f$.

3. Si g est injective, alors $\ker \tilde{g} \subset \ker g = \{0\}$. La formule précédente donne $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg } f$. Si f est surjective, alors $\text{Im } f = F$ et $\tilde{g} = g$. Donc $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g$. **On obtient** $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg } f$ **dans le premier cas et** $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg } g$ **dans le second.**
4. On a $\text{rg } a \leq \dim \mathbb{R}^2 = 2$. D'après la question 2, $\text{rg}(b \circ a) \leq 2 < 3$. Donc $b \circ a$ n'est pas surjectif. **Ainsi, $b \circ a$ n'est jamais un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.**

Corrigé de l'exercice 12 : Reconnaître un projecteur du plan

1. L'application p est linéaire. On calcule ensuite $p(p(x, y)) = p(2x - 2y, x - y)$. La première coordonnée vaut $2(2x - 2y) - 2(x - y) = 2x - 2y$. La seconde vaut $(2x - 2y) - (x - y) = x - y$. **Donc** $p \circ p = p$, **et** p **est un projecteur.**
2. On a $p(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$. Donc $\ker p = \text{Vect}((1, 1))$. Par ailleurs, $p(x, y) = (x - y)(2, 1)$, donc $\text{Im } p = \text{Vect}((2, 1))$. **Ainsi, p est la projection sur la droite $\text{Vect}((2, 1))$ parallèlement à la droite $\text{Vect}((1, 1))$.**
3. On trouve $p(1, 3) = (2 - 6, 1 - 3) = (-4, -2)$. Ensuite, $(1, 3) - (-4, -2) = (5, 5)$, qui appartient bien à $\ker p$. **Donc** $(1, 3) = (-4, -2) + (5, 5)$, **avec** $(-4, -2) \in \text{Im } p$ **et** $(5, 5) \in \ker p$. La figure ci-dessous montre cette décomposition : on descend de u vers

l'image en suivant la direction du noyau.



4. La symétrie associée est $s = 2p - \text{Id}$. Donc

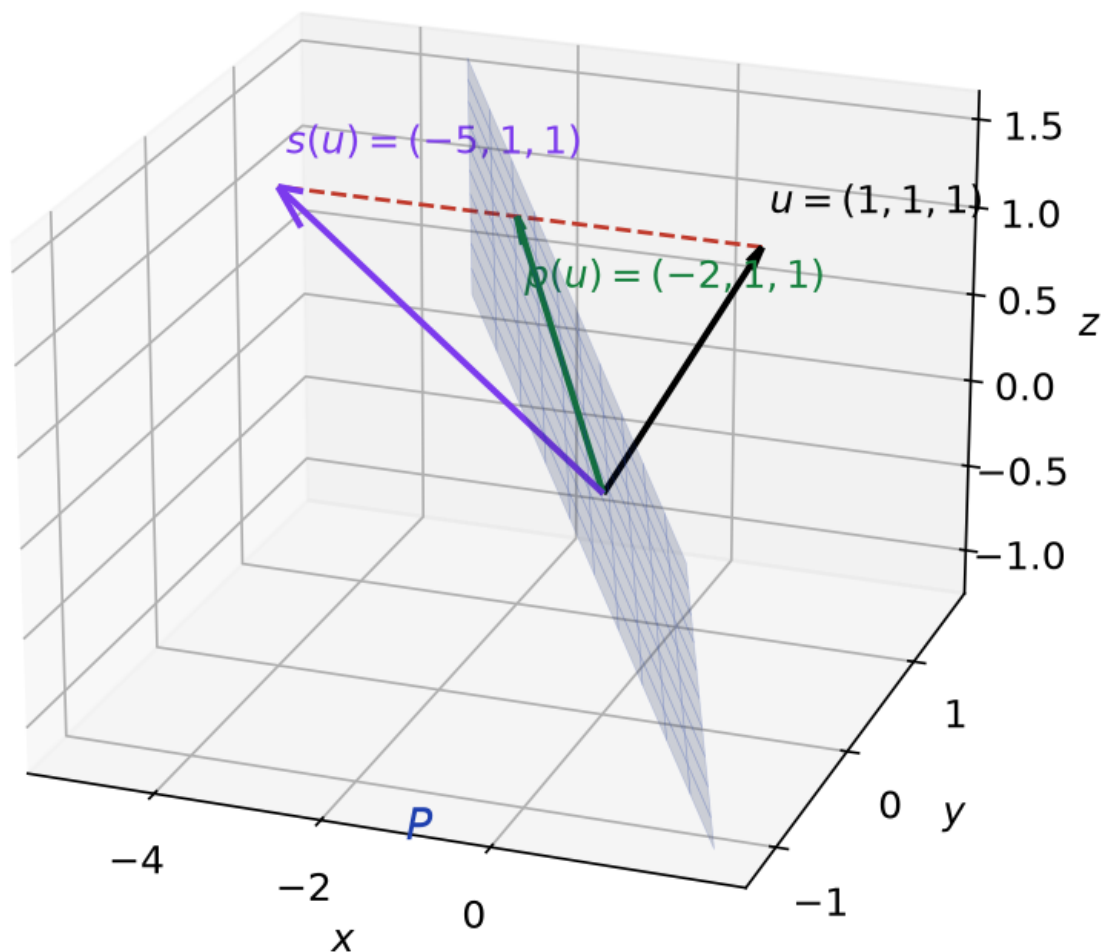
$s(x, y) = (4x - 4y - x, 2x - 2y - y) = (3x - 4y, 2x - 3y)$. Vérifions : la première coordonnée de $s(s(x, y))$ vaut $3(3x - 4y) - 4(2x - 3y) = x$. La seconde vaut $2(3x - 4y) - 3(2x - 3y) = y$. **Donc** $s(x, y) = (3x - 4y, 2x - 3y)$ **et** $s \circ s = \text{Id}$.

Corrigé de l'exercice 13 : Une symétrie de l'espace

1. Les coordonnées de s sont linéaires, donc s est linéaire. Ensuite, les deux dernières coordonnées de $s(s(x, y, z))$ valent y et z . La première vaut $-(-x - 2y - 2z) - 2y - 2z = x$. **Donc** $s \circ s = \text{Id}$.

2. D'une part, $s(x, y, z) = (x, y, z)$ équivaut à $-x - 2y - 2z = x$, soit $x + y + z = 0$.
 D'autre part, $s(x, y, z) = -(x, y, z)$ équivaut à $-x - 2y - 2z = -x$, $y = -y$ et $z = -z$. Cela revient à $y = z = 0$. **Ainsi, $\ker(s - \text{Id}) = P$ et $\ker(s + \text{Id}) = D$** .
3. D'après le cours, une application linéaire vérifiant $s \circ s = \text{Id}$ est la symétrie par rapport à $\ker(s - \text{Id})$ parallèlement à $\ker(s + \text{Id})$. **Donc s est la symétrie par rapport au plan P parallèlement à la droite D .**
4. Le projecteur associé est $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id})$. On obtient $p(x, y, z) = (\frac{-2y - 2z}{2}, y, z)$. **Donc $p(x, y, z) = (-y - z, y, z)$.**
5. On calcule $p(1, 1, 1) = (-2, 1, 1)$ et $s(1, 1, 1) = (-1 - 2 - 2, 1, 1)$. **Ainsi, $p(1, 1, 1) = (-2, 1, 1)$ et $s(1, 1, 1) = (-5, 1, 1)$.** On contrôle que $(1, 1, 1) = (-2, 1, 1) + (3, 0, 0)$, avec $(-2, 1, 1) \in P$ et $(3, 0, 0) \in D$. Comme le montre la figure ci-dessous, $s(1, 1, 1)$ s'obtient en retranchant $(3, 0, 0)$ à $p(1, 1, 1)$.

pointillé : direction de $D = \text{Vect}(1, 0, 0)$



Corrigé de l'exercice 14 : Transposition et matrices symétriques

1. La transposition est linéaire : $(\lambda M + \mu N)^T = \lambda M^T + \mu N^T$. Donc T est une somme d'applications linéaires. **Ainsi, T est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.**
2. On a $T(M) = 0$ si et seulement si $M^T = -M$, c'est-à-dire $M \in \mathcal{A}_2$. Une matrice antisymétrique d'ordre 2 a une diagonale nulle et s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$. **Donc**
 $\ker T = \mathcal{A}_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, **de dimension 1.**

3. Pour toute M , on a $T(M)^T = M^T + M = T(M)$. Donc $\text{Im } T \subset \mathcal{S}_2$. Le théorème du rang donne $\text{rg } T = 4 - 1 = 3$. Or $\mathcal{S}_2$ admet pour base $(E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21})$, donc $\dim \mathcal{S}_2 = 3$. **Par inclusion et égalité des dimensions, $\text{Im } T = \mathcal{S}_2$.**
4. On calcule $p(p(M)) = \frac{1}{4}(M + M^T + (M + M^T)^T) = \frac{1}{4} \cdot 2(M + M^T) = p(M)$. Donc p est un projecteur. Son image et son noyau sont ceux de T . **Ainsi, p est la projection sur $\mathcal{S}_2$ parallèlement à $\mathcal{A}_2$.**
5. La partie symétrique est $S = p(M) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$. La partie antisymétrique est $A = M - S$.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a bien $M = S + A$, avec S symétrique et A antisymétrique.

Corrigé de l'exercice 15 : Hyperplans en dimension 4 et polynômes

1. L'application $\varphi : (x, y, z, t) \rightarrow x + 2y - z + t$ est une forme linéaire non nulle, puisque $\varphi(e_1) = 1$. Donc $H = \ker \varphi$ est un hyperplan, de dimension 3. Ensuite, un vecteur de H vérifie $z = x + 2y + t$. Il s'écrit donc $x(1, 0, 1, 0) + y(0, 1, 2, 0) + t(0, 0, 1, 1)$. Cette famille engendre H ; elle comporte trois vecteurs et $\dim H = 3$. **Donc $((1, 0, 1, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 1, 1))$ est une base de H .**
2. On a $\varphi(1, 0, 0, 0) = 1 \neq 0$, donc $(1, 0, 0, 0) \notin H$. D'après le cours, toute droite engendrée par un vecteur hors de l'hyperplan en est un supplémentaire. **Ainsi, $\mathbb{R}^4 = H \oplus D$.**
3. L'évaluation en 1 est linéaire. De plus, $\varphi(1) = 1$, donc $\varphi \neq 0$. **Par conséquent, $K = \ker \varphi$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$, de dimension n .**
4. Chaque $(X - 1)X^k$ s'annule en 1, donc appartient à K . Ces polynômes sont de degrés 1, 2, ..., n , deux à deux distincts. Une famille de polynômes non nuls de degrés distincts est libre. On a donc n vecteurs libres dans K , qui est de dimension n . **La famille est une base**

de K . Enfin, le polynôme 1 n'est pas dans K , car $\varphi(1) = 1$. Donc $\mathbb{R}_n[X] = K \oplus \mathbb{R}_0[X]$.

5. Notons $\psi(P) = P(0)P(1)$. On a $\psi(1) = 1$ mais $\psi(2) = 4 \neq 2\psi(1)$. L'application ψ n'est pas une forme linéaire.

Corrigé de l'exercice 16 : Formes linéaires et intersection d'hyperplans

- Posons $H = \ker \varphi$. C'est un hyperplan, car $\varphi \neq 0$. Choisissons $a \notin H$; alors $\varphi(a) \neq 0$ et $E = H \oplus \text{Vect}(a)$. Posons $\lambda = \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}$. La forme $\psi - \lambda \varphi$ est nulle sur H , car $H \subset \ker \psi$. Elle est aussi nulle en a , par choix de λ . Une application linéaire nulle sur deux sous-espaces supplémentaires est nulle. **Donc** $\psi = \lambda \varphi$.
- Notons $\varphi(x, y, z) = x - y + 2z$. Le plan donné est $\ker \varphi$. Une forme ψ s'annule sur ce plan si et seulement si $\ker \varphi \subset \ker \psi$. D'après la question 1, c'est équivalent à $\psi = \lambda \varphi$. La réciproque est immédiate. **Les formes cherchées sont les** $(x, y, z) \rightarrow \lambda(x - y + 2z)$, **avec** $\lambda \in \mathbb{R}$.
- L'application $\Phi: E \rightarrow \mathbb{K}^2$ est linéaire, et $\ker \Phi = H_1 \cap H_2$. Montrons que $\text{rg } \Phi = 2$. D'abord, $\text{Im } \Phi \neq \{0\}$, car $\varphi \neq 0$. Supposons par l'absurde $\text{rg } \Phi = 1$. Alors $\text{Im } \Phi = \text{Vect}((\alpha, \beta))$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Pour tout x , le vecteur $(\varphi(x), \psi(x))$ est colinéaire à (α, β) , donc $\beta \varphi(x) - \alpha \psi(x) = 0$.

Si $\alpha = 0$, alors $\beta \neq 0$ et $\varphi = 0$: c'est absurde. Donc $\alpha \neq 0$ et $\psi = \frac{\beta}{\alpha} \varphi$. Comme $\psi \neq 0$, on a $\beta \neq 0$, et donc $\ker \psi = \ker \varphi$. Cela contredit $H_1 \neq H_2$. Par conséquent, $\text{rg } \Phi = 2$. **Le théorème du rang donne** $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.
- Les formes $x + y + z + t$ et $x - y + z - t$ ne sont pas proportionnelles, donc les hyperplans sont distincts. En additionnant puis en soustrayant les deux équations, on obtient $x + z = 0$ et $y + t = 0$. **Une base de l'intersection est** $((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1))$, et l'on retrouve bien la dimension $4 - 2 = 2$.

Corrigé de l'exercice 17 : Suites des noyaux et des images itérés

1. Soit $x \in N_k$. Alors $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$, donc $x \in N_{k+1}$. Ensuite, soit $y = f^{k+1}(x) \in I_{k+1}$. On écrit $y = f^k(f(x))$, donc $y \in I_k$. Ainsi, $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.
2. Notons $d_k = \dim N_k$. Cette suite est croissante et à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$. Supposons que $d_{k+1} \geq d_k + 1$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. Alors $d_{n+1} \geq d_0 + n + 1 = n + 1$, ce qui est absurde. Il existe donc $k \leq n$ avec $d_k = d_{k+1}$. Avec l'inclusion $N_k \subset N_{k+1}$, on obtient $N_k = N_{k+1}$.
3. Supposons $N_k = N_{k+1}$. Soit $x \in N_{k+2}$. Alors $f^{k+1}(f(x)) = 0$, donc $f(x) \in N_{k+1} = N_k$. Ainsi, $f^k(f(x)) = 0$, c'est-à-dire $x \in N_{k+1}$. Donc $N_{k+2} \subset N_{k+1}$, et l'autre inclusion est connue. Par récurrence, $N_j = N_k$ pour tout $j \geq k$.
4. Le théorème du rang donne $\dim I_j = n - \dim N_j$. Pour $j \geq k$, on a donc $\dim I_{j+1} = \dim I_j$. Or $I_{j+1} \subset I_j$. Par conséquent, $I_j = I_k$ pour tout $j \geq k$.
5. On a $f(x, y, z) = (y, z, 0)$, puis $f^2(x, y, z) = f(y, z, 0) = (z, 0, 0)$, et $f^3 = 0$. Donc $N_1 = \{y = z = 0\} = \text{Vect}(e_1)$. Ensuite, $N_2 = \{z = 0\} = \text{Vect}(e_1, e_2)$ et $N_3 = \mathbb{R}^3$. Les rangs de f , f^2 et f^3 valent respectivement 2, 1 et 0 ; ici la stabilisation a lieu au rang $k = 3 = n$.

Corrigé de l'exercice 18 : Noyau et image supplémentaires

1. Le sens direct est la définition d'une somme directe. Réciproquement, supposons $\ker f \cap \text{Im } f = \{0\}$, et notons $n = \dim E$. La formule de Grassmann et le théorème du rang donnent :

$$\dim(\ker f + \text{Im } f) = \dim \ker f + \text{rg } f - 0 = n.$$

Donc $\ker f + \operatorname{Im} f = E$, et la somme est directe. **Ainsi**, $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$ équivaut à $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

- Supposons $\ker f = \ker f^2$. Soit $y \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$, avec $y = f(x)$. Alors $f^2(x) = f(y) = 0$, donc $x \in \ker f^2 = \ker f$. Ainsi, $y = f(x) = 0$. Réciproquement, supposons $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$. On a toujours $\ker f \subset \ker f^2$. Soit alors $x \in \ker f^2$. Le vecteur $f(x)$ est dans $\operatorname{Im} f$ et dans $\ker f$, donc il est nul. **Ainsi**, $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\} \Leftrightarrow \ker f = \ker f^2$.
- On a toujours $\ker f \subset \ker f^2$ et $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$. Par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} f = n - \dim \ker f$ et $\dim \operatorname{Im} f^2 = n - \dim \ker f^2$. Les deux images sont égales si et seulement si leurs dimensions le sont, donc si et seulement si les deux noyaux ont même dimension. **Grâce aux inclusions**, $\ker f = \ker f^2 \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
- Pour un projecteur p , on a $p^2 = p$, donc $\ker p^2 = \ker p$ et $\operatorname{Im} p^2 = \operatorname{Im} p$. Le cours donne aussi $E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$. En revanche, pour $g(x, y) = (y, 0)$, on a $\ker g = \operatorname{Vect}(e_1) = \operatorname{Im} g$. De plus, $g^2 = 0$, donc $\ker g^2 = \mathbb{R}^2 \neq \ker g$. **Les trois propriétés sont vraies pour un projecteur et toutes fausses pour g .**

Corrigé de l'exercice 19 : Somme de deux projecteurs

- On développe : $(p + q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2$. Avec $p^2 = p$, $q^2 = q$ et les hypothèses, il reste $p + q$. **Donc $p + q$ est un projecteur.**
- Le même développement donne $p + q + p \circ q + q \circ p = p + q$, donc $p \circ q + q \circ p = 0$. Composons à gauche par p : $p \circ q + p \circ q \circ p = 0$. Composons ensuite à droite par p : $p \circ q \circ p + q \circ p = 0$. Par différence, $p \circ q = q \circ p$. En reportant, on obtient $2 p \circ q = 0$. Comme $2 \neq 0$ dans $\mathbb{K}$, **on conclut que** $p \circ q = q \circ p = 0$.
- D'abord, $\operatorname{Im}(p + q) \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$. Ensuite, soit $y \in \operatorname{Im} p$. Alors $p(y) = y$ et $q(y) = q(p(y)) = 0$. Donc $(p + q)(y) = y$, et $y \in \operatorname{Im}(p + q)$. Il en va de même pour $\operatorname{Im} q$. La somme est directe : si $y \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$, alors $y = p(y) = p(q(y)) = 0$.

Pour le noyau, l'inclusion $\ker p \cap \ker q \subset \ker(p + q)$ est claire. Réciproquement, si $p(x) + q(x) = 0$, on applique p . Il vient $p(x) + p(q(x)) = p(x) = 0$, puis $q(x) = 0$. **Ainsi**, $\operatorname{Im}(p + q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$ et $\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q$.

4. On a $p \circ q(x, y, z) = p(0, y, 0) = 0$ et $q \circ p(x, y, z) = q(x, 0, 0) = 0$. Donc $p + q : (x, y, z) \rightarrow (x, y, 0)$ est un projecteur. Son image est $\text{Vect}(e_1) \oplus \text{Vect}(e_2)$. Son noyau est $\text{Vect}(e_2, e_3) \cap \text{Vect}(e_1, e_3) = \text{Vect}(e_3)$. **C'est la projection sur le plan $z = 0$ parallèlement à l'axe $\text{Vect}(e_3)$.**

Corrigé de l'exercice 20 : Problème : endomorphismes de rang 1

- Pour tout x , on a $f(x) \in \text{Vect}(a)$. Il existe donc un scalaire $\varphi(x)$ tel que $f(x) = \varphi(x) a$. Ce scalaire est unique, car $a \neq 0$. Montrons la linéarité. D'une part, $f(x + \lambda y) = \varphi(x + \lambda y) a$. D'autre part, $f(x) + \lambda f(y) = (\varphi(x) + \lambda \varphi(y)) a$. Comme $a \neq 0$, on identifie les coefficients. Enfin, $\varphi \neq 0$, sinon f serait nulle, de rang 0. **Donc φ est une forme linéaire non nulle, unique.**
- On a $f(x) = 0$ si et seulement si $\varphi(x) a = 0$, soit $\varphi(x) = 0$. **Donc $\ker f = \ker \varphi$, qui est un hyperplan puisque $\varphi \neq 0$.** On retrouve $\dim \ker f = n - 1$, en accord avec le théorème du rang.
- Par linéarité, $f(f(x)) = f(\varphi(x) a) = \varphi(x) f(a) = \varphi(x) \varphi(a) a$. **Donc $f \circ f = \varphi(a) f$.**
- Si $\varphi(a) = 1$, alors $f^2 = f$, donc f est un projecteur. Réciproquement, si $f^2 = f$, alors $(\varphi(a) - 1) f = 0$, et $f \neq 0$ impose $\varphi(a) = 1$. De même, $f^2 = 0$ équivaut à $\varphi(a) f = 0$, soit $\varphi(a) = 0$. Or cela signifie $a \in \ker \varphi = \ker f$. **Ainsi, f est un projecteur si et seulement si $\varphi(a) = 1$, et $f^2 = 0$ si et seulement si $a \in \ker f$.**
- Notons $c = \varphi(a)$. Si $c = -1$, alors $(\text{Id} + f)(a) = a + c a = 0$ avec $a \neq 0$. Donc $\text{Id} + f$ n'est pas injectif. Si $c \neq -1$, on calcule, grâce à $f^2 = c f$:

$$(\text{Id} + f) \circ \left(\text{Id} - \frac{f}{1 + c} \right) = \text{Id} + f - \frac{f + c f}{1 + c} = \text{Id}.$$

En dimension finie, un endomorphisme qui admet un inverse à droite est bijectif. **Donc $\text{Id} + f$ est un automorphisme si et seulement si $\varphi(a) \neq -1$, d'inverse $\text{Id} - \frac{1}{1 + \varphi(a)} f$.**

6. Ici, $a = (1, 2, -1)$ et $\varphi(x, y, z) = x + y + z$. On trouve $\varphi(a) = 1 + 2 - 1 = 2$, donc

$f \circ f = 2f$. En particulier, $\frac{1}{2}f$ est un projecteur. Comme $2 \neq -1$, l'endomorphisme $\text{Id} + f$ est inversible, d'inverse $\text{Id} - \frac{1}{3}f$. Notons $S = x + y + z$. On obtient :

$$(\text{Id} + f)^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-2x + y - 2z}{3}, \frac{x + y + 4z}{3} \right).$$

Par exemple, $(\text{Id} + f)(1, 0, 0) = (2, 2, -1)$, et la formule renvoie bien $(1, 0, 0)$.

Point de méthode : un endomorphisme de rang 1 s'écrit toujours $x \rightarrow \varphi(x)a$; la relation $f^2 = \varphi(a)f$ règle ensuite toutes les questions.

Corrigé de l'exercice 21 : Problème : interpolation de Lagrange

- Chaque évaluation $P \rightarrow P(a_i)$ est linéaire. Donc $u(\lambda P + \mu Q) = \lambda u(P) + \mu u(Q)$, coordonnée par coordonnée. **L'application u est linéaire.**
- Soit $P \in \ker u$. Alors P s'annule en $a_0, \dots, a_n$, soit $n+1$ points distincts. Or un polynôme non nul de degré au plus n a au plus n racines. **Donc $P = 0$, et u est injective.**
- On a $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$. Une application linéaire injective entre espaces de même dimension finie est bijective. **Donc u est un isomorphisme.** Autrement dit, pour tous réels $b_0, \dots, b_n$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout i .
- Pour $k \neq i$, le facteur $X - a_k$ figure dans L_i , donc $L_i(a_k) = 0$. De plus, chaque facteur vaut 1 en a_i , donc $L_i(a_i) = 1$. Enfin, $\deg L_i = n$. **Ainsi, $u(L_i) = \varepsilon_i$, le i -ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.** L'isomorphisme u^{-1} envoie une base sur une base. Donc $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

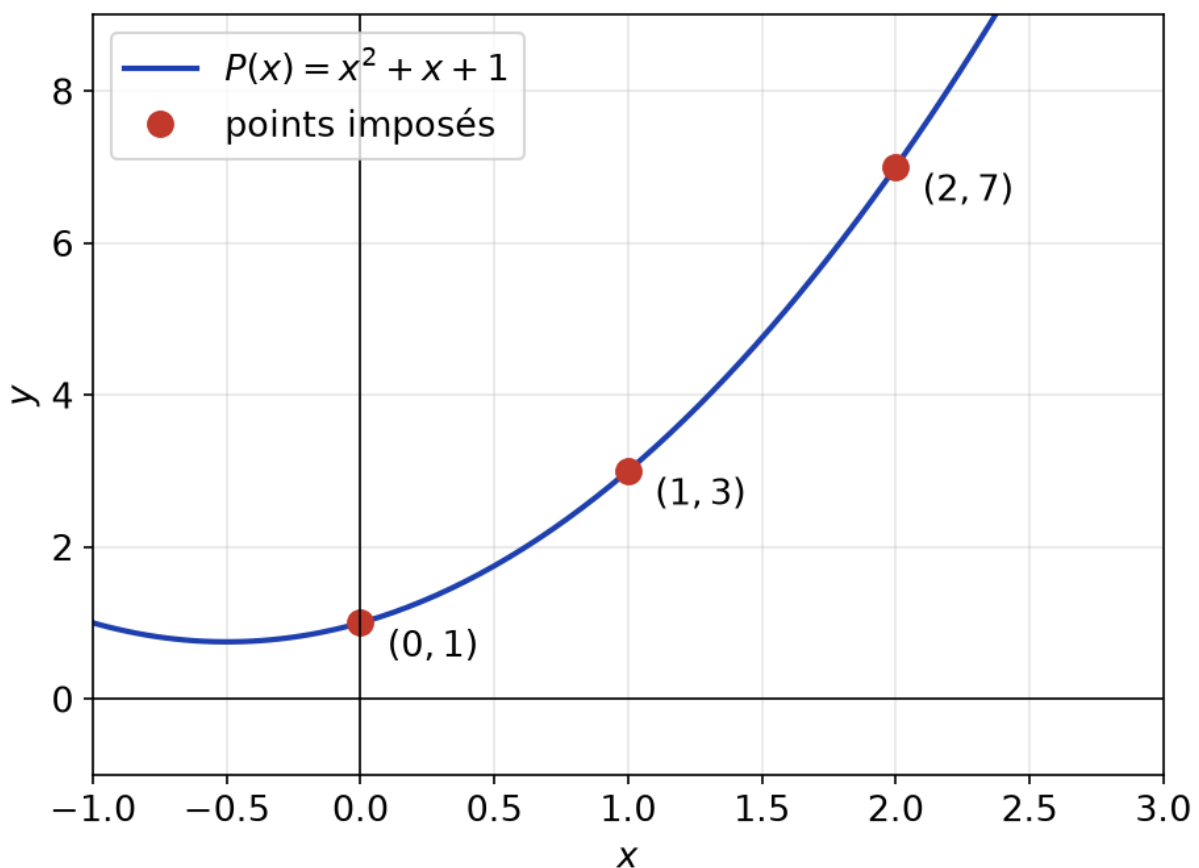
5. Les polynômes de Lagrange associés à $0, 1, 2$ sont :

$$L_0 = \frac{(X-1)(X-2)}{2}, \quad L_1 = -X(X-2), \quad L_2 = \frac{X(X-1)}{2}.$$

Par linéarité de u^{-1} , on a $P = L_0 + 3L_1 + 7L_2$. On développe :

$$P = \frac{X^2 - 3X + 2 - 6X^2 + 12X + 7X^2 - 7X}{2} = \frac{2X^2 + 2X + 2}{2}.$$

On obtient $P = X^2 + X + 1$. On vérifie que $P(0) = 1$, $P(1) = 3$ et $P(2) = 7$.
La figure ci-dessous montre la parabole obtenue, qui passe exactement par les trois points.



Point de méthode : pour prouver qu'une application linéaire entre espaces de même dimension finie est un isomorphisme, il suffit d'étudier son noyau.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [applications linéaires, cours de maths en L1](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L1 sur applications linéaires](#)
- À maîtriser avant : [Familles libres, bases et dimension](#)
- Chapitre précédent : [Familles libres, bases et dimension](#)
- Chapitre suivant : [Matrice d'une application linéaire et changement de base](#)
- Le même thème en maths sup : [applications linéaires, exercices de maths sup](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)