

Applications et relations

Exercice 1 : Graphes, restriction et prolongement

On pose $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{a, b\}$.

1. Parmi les parties suivantes de $E \times F$, lesquelles sont des graphes d'applications de E dans F ? $\Gamma_1 = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$, $\Gamma_2 = \{(1, a), (2, b)\}$, $\Gamma_3 = \{(1, a), (1, b), (2, a), (3, b)\}$.

2. Combien existe-t-il d'applications de E dans F ?

3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $x \mapsto |x|$. Expliciter les restrictions de f à $\mathbb{R}_+$ et à $\mathbb{R}_-$. Sont-elles injectives ?
L'application f est-elle injective ?

4. Soit $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1}$. Décrire tous les prolongements de g à $\mathbb{R}$. Lequel est continu ?

Exercice 2 : Images directes et réciproques par la fonction carré

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $x \mapsto x^2$. Déterminer les ensembles suivants.

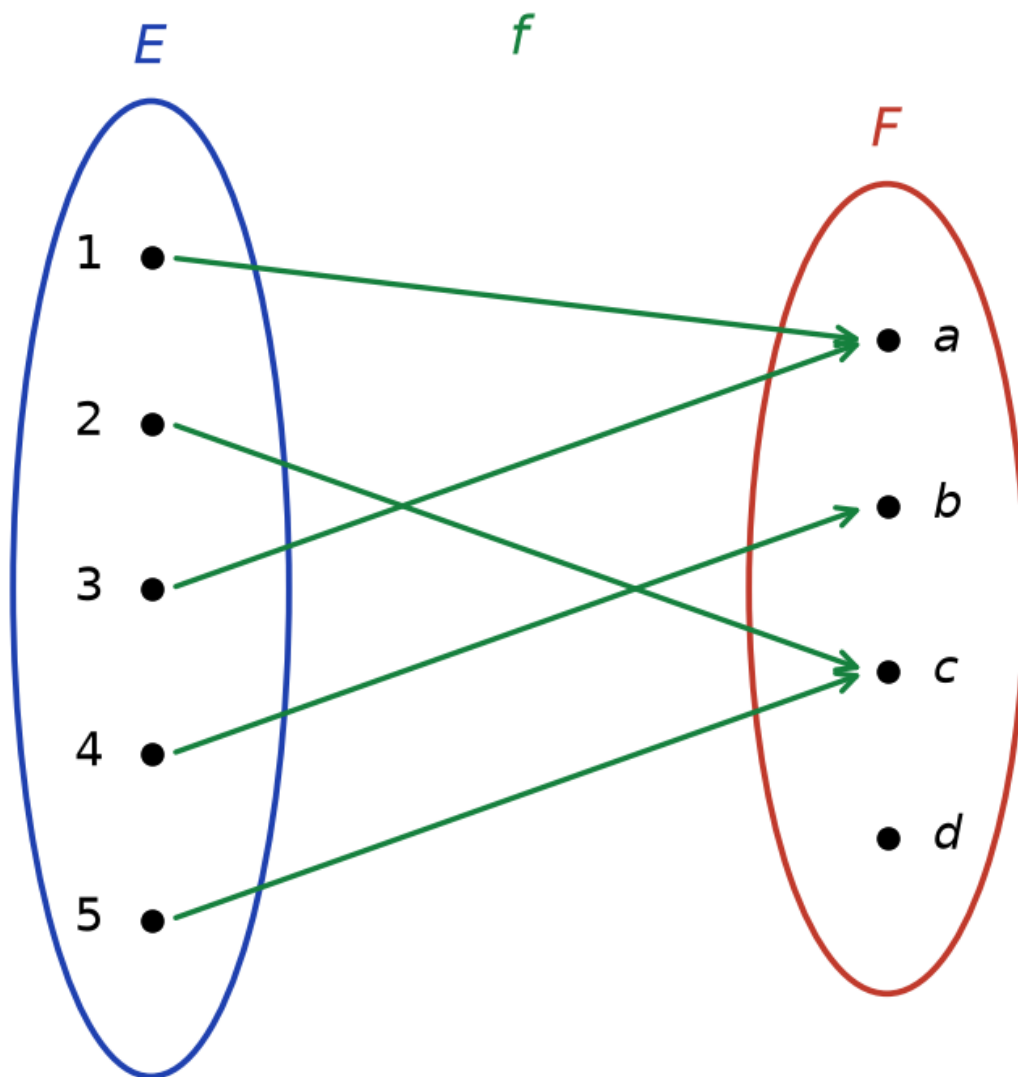
1. $f([-1, 2])$ et $f([-3, -1])$.

2. $f^{-1}([1, 4])$ et $f^{-1}([-2, -1])$.

3. $f^{-1}(f([0, 1]))$. Comparer avec $[0, 1]$.
4. $f(f^{-1}([-1, 4]))$. Comparer avec $[-1, 4]$.

Exercice 3 : Une application entre ensembles finis

On pose $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $F = \{a, b, c, d\}$ et on définit $f : E \rightarrow F$ par le diagramme ci-dessous : $f(1) = f(3) = a$, $f(4) = b$, $f(2) = f(5) = c$.



1. Déterminer $f(\{1, 2, 3\})$, $f(\{3, 4, 5\})$ et $f(E)$.
2. Déterminer $f^{-1}(\{a\})$, $f^{-1}(\{d\})$ et $f^{-1}(\{a, b, d\})$.
3. Comparer $f(\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\})$ et $f(\{1, 2, 3\}) \cap f(\{3, 4, 5\})$.
4. L'application f est-elle injective ? surjective ? Justifier.
5. Combien existe-t-il d'applications surjectives de E dans F qui coïncident avec f sur $\{1, 2, 3, 4\}$?

Exercice 4 : Images et opérations ensemblistes

Soient $f : E \rightarrow F$ une application, A et B deux parties de E , C et D deux parties de F .

1. Démontrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. Démontrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, puis que l'égalité a lieu lorsque f est injective.
3. Démontrer que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ et que $f^{-1}(F \setminus C) = E \setminus f^{-1}(C)$.
4. Démontrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$ et que $f(f^{-1}(C)) = C \cap f(E)$.

Exercice 5 : Injectivité et surjectivité de fonctions réelles

Pour chacune des applications suivantes, dire si elle est injective, surjective, bijective. Lorsqu'elle est bijective, donner sa réciproque.

$$1. \quad \begin{array}{l} f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ x \rightarrow 3x - 2 \end{array}.$$

$$2. \quad \begin{array}{l} f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ x \rightarrow x^2 + 1 \end{array}.$$

$$3. \quad \begin{array}{l} f_3: \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, +\infty[, \\ x \rightarrow x^2 + 1 \end{array}.$$

$$4. \quad \begin{array}{l} f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ x \rightarrow e^x \end{array}.$$

$$5. \quad \begin{array}{l} f_5: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ x \rightarrow x^3 - x \end{array}.$$

Exercice 6 : Applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$

On définit trois applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$: $f(n) = 2n$, $g(n) = \lfloor n/2 \rfloor$ (partie entière de $n/2$) et $h(n) = n + 1$ si n est pair, $h(n) = n - 1$ si n est impair.

1. Étudier l'injectivité et la surjectivité de f et de g .
2. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$. Commenter.
3. Calculer $h \circ h$. En déduire que h est bijective et donner h^{-1} .

Exercice 7 : Deux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

On considère $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \rightarrow (x + y, x - y)$ et $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \rightarrow (x + y, xy)$.

1. Montrer que φ est bijective et déterminer φ^{-1} .
2. Montrer que ψ n'est pas injective.
3. Montrer que ψ n'est pas surjective.
4. Démontrer que $\psi(\mathbb{R}^2) = \{(s, p) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 \geq 4p\}$.

Exercice 8 : Une homographie bijective

Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

1. Déterminer deux réels α et β tels que $f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x-1}$ pour tout $x \neq 1$.
2. Montrer que $f(x) \neq 2$ pour tout $x \neq 1$. On considère désormais f comme une application de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
3. Montrer que f est bijective et expliciter f^{-1} .
4. Déterminer $f(]1, +\infty[)$ et $f^{-1}([3, 5])$.

Exercice 9 : Composition, injectivité et surjectivité

Soient $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. Construire un exemple où $g \circ f$ est bijective, alors que f n'est pas surjective et g n'est pas

injective.

4. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.
5. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice 10 : Bijectivité par la composition

1. Soit $f: E \rightarrow E$ telle que $f \circ f \circ f = \text{Id}_E$. Montrer que f est bijective et exprimer f^{-1} à l'aide de f .
2. Soit $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que $u(x) = \frac{1}{1-x}$ définit une application $u: D \rightarrow D$.
3. Calculer $u \circ u$ puis $u \circ u \circ u$. En déduire que u est bijective et donner u^{-1} .
4. Soient $f: E \rightarrow F$, $g: F \rightarrow E$ telles que $g \circ f$ et $f \circ g$ soient bijectives. Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice 11 : Caractériser l'injectivité par les images

Soit $f: E \rightarrow F$ une application.

1. Montrer que f est injective si et seulement si $f^{-1}(f(A)) = A$ pour toute partie A de E .
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $f(f^{-1}(C)) = C$ pour toute partie C de F .
3. Montrer que f est injective si et seulement si $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ pour toutes parties A , B de E .

Exercice 12 : Propriétés de quelques relations binaires

Pour chaque relation, dire si elle est réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive. Préciser s'il s'agit d'une relation d'équivalence ou d'une relation d'ordre.

1. Sur $\mathbb{R}$: $x \mathcal{R}_1 y \Leftrightarrow x \leq y$.
2. Sur $\mathbb{R}$: $x \mathcal{R}_2 y \Leftrightarrow |x - y| \leq 1$.
3. Sur $\mathbb{Z}$: $x \mathcal{R}_3 y \Leftrightarrow x - y$ est pair.
4. Sur $\mathbb{R}$: $x \mathcal{R}_4 y \Leftrightarrow xy > 0$.
5. Sur $\mathcal{P}(E)$, où E est un ensemble non vide : $A \mathcal{R}_5 B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

Exercice 13 : Classes d'équivalence dans le plan et sur $\mathbb{R}$

1. Sur $\mathbb{R}^2$, on pose $(x, y) \mathcal{R} (x', y') \Leftrightarrow y - x^2 = y' - x'^2$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et décrire géométriquement ses classes.
2. Sur $\mathbb{R}$, on pose $x \mathcal{S} y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$. Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.
3. Déterminer la classe de tout réel x pour $\mathcal{S}$. Quelles classes sont réduites à un seul élément ?

Exercice 14 : Congruence modulo 5

Sur $\mathbb{Z}$, on note $\begin{smallmatrix} a \equiv b \\ , [5] \end{smallmatrix}$ lorsque 5 divise $b - a$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.
2. Montrer qu'elle possède exactement cinq classes et que celles-ci forment une partition de $\mathbb{Z}$.
Donner les éléments de $\bar{2}$ compris entre -10 et 10 .
3. Déterminer la classe de 17 , de -3 et de 2026 .
4. Montrer que si $a \equiv_{[5]} a'$ et $b \equiv_{[5]} b'$, alors $a + b \equiv_{[5]} a' + b'$ et $ab \equiv_{[5]} a'b'$.
5. Déterminer les classes possibles de n^2 pour $n \in \mathbb{Z}$. En déduire que $n^2 + 2$ n'est jamais divisible par 5 .

Exercice 15 : Relation d'équivalence associée à une application

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On définit sur E la relation $x \mathcal{R}_f x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$.

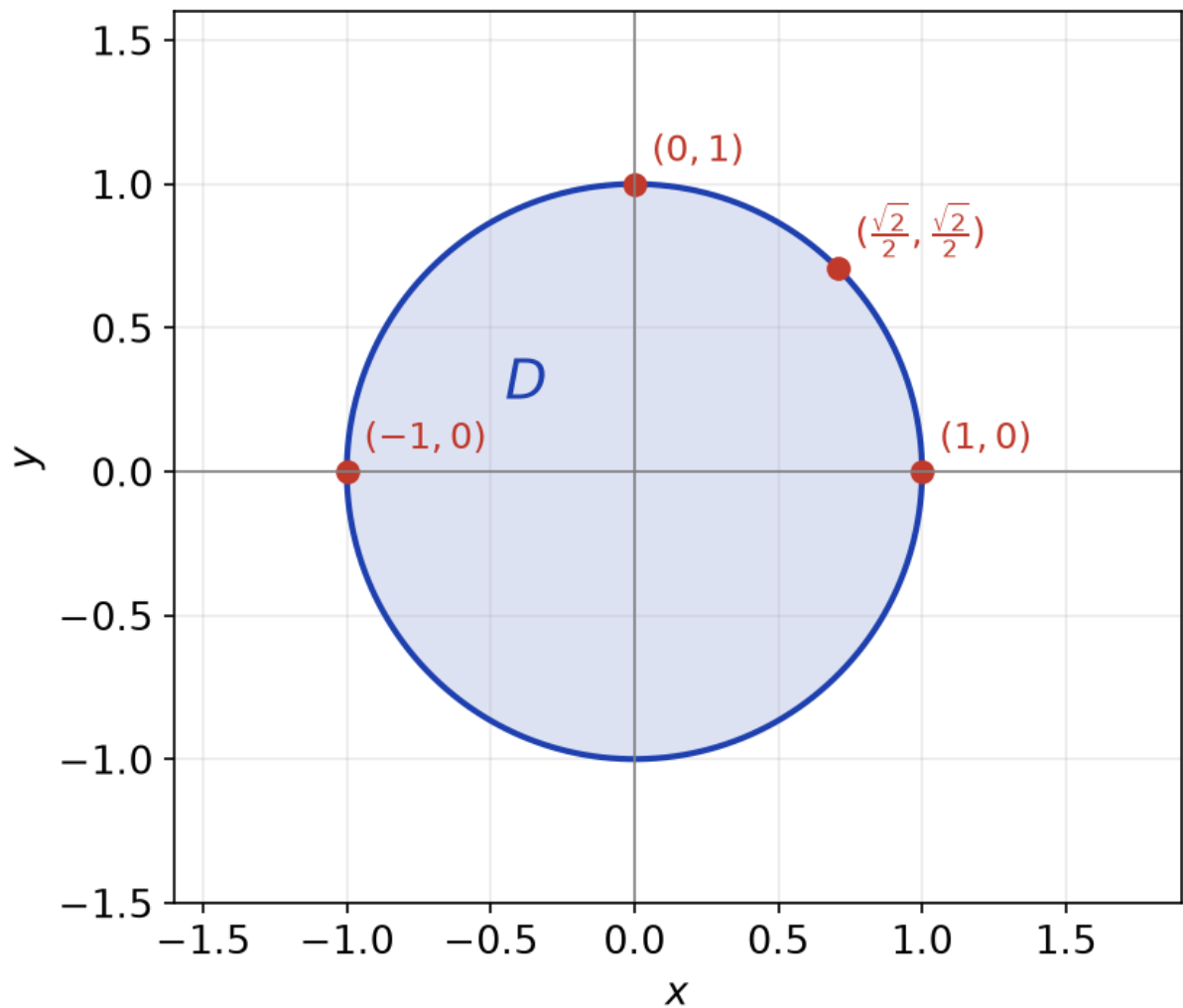
1. Montrer que $\mathcal{R}_f$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer que la classe de x est $f^{-1}(\{f(x)\})$. À quelle condition sur f toutes les classes sont-elles des singletons ?
3. On note $E / \mathcal{R}_f$ l'ensemble des classes. Montrer que l'on définit une application $\bar{f} : E / \mathcal{R}_f \rightarrow f(E)$ en posant $\bar{f}(\bar{x}) = f(x)$, c'est-à-dire que cette valeur ne dépend pas du représentant choisi.
4. Montrer que $\bar{f}$ est bijective.
5. Application : $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$. Décrire les classes et la bijection $\bar{f}$.

Exercice 16 : Divisibilité et diagramme de Hasse

1. Montrer que la divisibilité est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$. Est-elle totale ?
2. La divisibilité est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$?
3. On note D_{36} l'ensemble des diviseurs positifs de 36, ordonné par la divisibilité. Dresser son diagramme de Hasse.
4. Soit $A = \{4, 6\}$. Déterminer dans D_{36} les majorants et les minorants de A . La partie A a-t-elle un plus grand, un plus petit élément ?
5. Mêmes questions pour $B = \{2, 3, 4, 6, 9\}$.

Exercice 17 : Ordre produit et ordre lexicographique

Sur $\mathbb{R}^2$, on définit l'ordre produit $(x, y) \preceq_P (x', y') \Leftrightarrow (x \leq x' \text{ et } y \leq y')$ et l'ordre lexicographique $(x, y) \preceq_L (x', y') \Leftrightarrow (x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y'))$. On note D le disque fermé de centre O et de rayon 1, représenté ci-dessous.



1. Montrer que $\prec_P$ est une relation d'ordre. Est-elle totale ?
2. Montrer que $\prec_L$ est une relation d'ordre totale.
3. Comparer $(1, 5)$ et $(2, 0)$ pour chacun des deux ordres.
4. Pour l'ordre produit, déterminer les majorants de D . La partie D a-t-elle un plus grand élément ?
5. Pour l'ordre lexicographique, montrer que D a un plus grand et un plus petit élément.

Soit $E = \{1, 2, 3\}$. On ordonne $\mathcal{P}(E)$ par l'inclusion.

1. Rappeler pourquoi l'inclusion est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$. Est-elle totale ?
2. Soit $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{2\}\}$. Déterminer les majorants et les minorants de $\mathcal{A}$, ainsi que le plus petit des majorants.
3. La partie $\mathcal{B} = \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ a-t-elle un plus petit élément ? un plus grand élément ?
4. Dans un ensemble quelconque X , montrer que pour $A, B \in \mathcal{P}(X)$, la partie $A \cup B$ est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de $\{A, B\}$.

Exercice 19 : Ordre sur les fonctions réelles

Sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x)$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre.
2. On pose $f(x) = x$ et $g(x) = 0$. Montrer que f et g ne sont pas comparables. L'ordre est-il total ?
3. Déterminer les majorants de $\{f, g\}$, puis montrer que $h : x \rightarrow \max(x, 0)$ est le plus petit d'entre eux.
4. Déterminer de même le plus grand des minorants de $\{f, g\}$.

Exercice 20 : Théorème de Cantor

Soit E un ensemble.

1. Montrer que $j : E \rightarrow \mathcal{P}(E), x \mapsto \{x\}$ est injective.
2. Soit $\varphi : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ une application quelconque. On pose $A = \{x \in E \mid x \notin \varphi(x)\}$. Montrer que A n'a pas d'antécédent par φ .
3. En déduire qu'il n'existe aucune surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$, et en particulier aucune bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
4. Illustration : $E = \{1, 2\}$, $\varphi(1) = \{1, 2\}$, $\varphi(2) = \emptyset$. Calculer A et vérifier le résultat de la question 2.

Exercice 21 : Problème : une bijection entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$

On définit $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$, $(p, q) \mapsto 2^p(2q+1)$ et $\psi = \varphi^{-1}$, c'est-à-dire $\psi(p, q) = 2^p(2q+1) - 1$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 2^p(2q+1)$.
2. En déduire que φ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}^*$, puis que ψ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.
3. Calculer $\psi(0, 0)$ et $\psi(3, 2)$. Déterminer les antécédents de 11, 47 et 100 par ψ .
4. Déterminer $\psi(\{0\} \times \mathbb{N})$ et $\psi(\mathbb{N}^* \times \mathbb{N})$.
5. Soit $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $g(n) = n/2$ si n est pair et $g(n) = -(n+1)/2$ si n est impair. Montrer que g est bijective en exhibant sa réciproque.
6. En déduire une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{Z}$ et calculer son image en $(2, 1)$. Construire enfin une bijection de $\mathbb{N}^3$ sur $\mathbb{N}$.

Exercice 22 : Relations d'équivalence sur un ensemble à trois éléments

Soit $E = \{1, 2, 3\}$.

1. Dresser la liste de toutes les partitions de E .
2. En déduire le nombre de relations d'équivalence sur E . Écrire le graphe de celle qui est associée à la partition $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$.
3. La relation de graphe $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ est-elle une relation d'équivalence ? Déterminer la plus petite relation d'équivalence qui la contient.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [applications et relations, cours de maths en L1](#)
- À maîtriser avant : [Logique, raisonnement et ensembles](#)
- Chapitre précédent : [Logique, raisonnement et ensembles](#)
- Chapitre suivant : [Entiers naturels, récurrence et dénombrement](#)

- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)