

Applications et relations

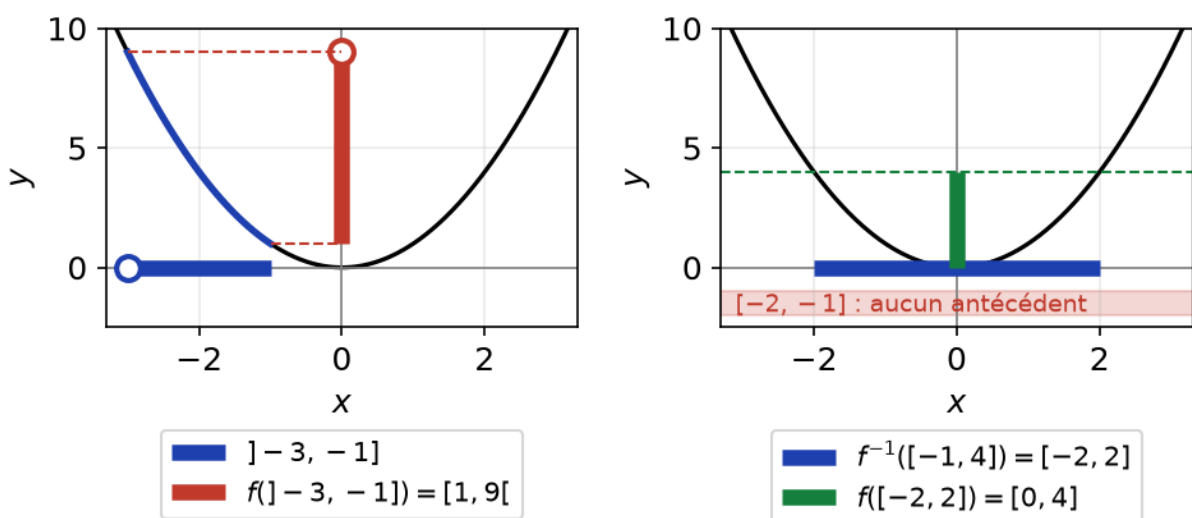
Corrigé de l'exercice 1 : Graphes, restriction et prolongement

1. Une partie Γ de $E \times F$ est un graphe d'application si chaque élément de E est la première composante d'exactly un couple de Γ . Pour Γ_1 , les éléments 1, 2 et 3 apparaissent chacun une seule fois : c'est un graphe. En revanche, dans Γ_2 , l'élément 3 n'a pas d'image. Enfin, dans Γ_3 , l'élément 1 a deux images, a et b . **Seul Γ_1 est un graphe d'application.**
2. Une application est déterminée par le choix de $f(1)$, $f(2)$ et $f(3)$ dans F . Chaque choix offre deux possibilités, et ces choix sont indépendants. **Il existe donc $2^3 = 8$ applications de E dans F .**
3. Pour $x \geq 0$, on a $|x| = x$; pour $x \leq 0$, on a $|x| = -x$. Ainsi $f|_{\mathbb{R}_+} : x \rightarrow x$ et $f|_{\mathbb{R}_-} : x \rightarrow -x$. Si $x = x'$, ou si $-x = -x'$, alors $x = x'$: **les deux restrictions sont injectives.** Cependant, $f(-1) = f(1) = 1$ avec $-1 \neq 1$. **L'application f n'est donc pas injective.** Restreindre l'ensemble de départ peut ainsi rendre une application injective.
4. Pour $x \neq 1$, on factorise : $g(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$. Un prolongement G de g à $\mathbb{R}$ doit vérifier $G(x) = x+1$ pour $x \neq 1$. En revanche, la valeur $G(1)$ est libre. **Les prolongements sont les applications G_c définies par $G_c(x) = x+1$ si $x \neq 1$ et $G_c(1) = c$, où c décrit $\mathbb{R}$.** Comme $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$, le prolongement G_c est continu en 1 si et seulement si $c = 2$. **Le seul prolongement continu est $x \rightarrow x+1$.**

Corrigé de l'exercice 2 : Images directes et réciproques par la fonction carré

1. Sur $[-1, 0]$, la fonction carré décroît de 1 à 0 ; sur $[0, 2]$, elle croît de 0 à 4. Comme elle est continue, elle prend toutes les valeurs intermédiaires. Donc $f([-1, 2]) = [0, 1] \cup [0, 4]$, soit $f([-1, 2]) = [0, 4]$. Ensuite, pour $x \in]-3, -1]$, on a $1 \leq |x| < 3$, donc $1 \leq x^2 < 9$. Réciproquement, tout $y \in [1, 9[$ s'écrit $f(-\sqrt{y})$ avec $-\sqrt{y} \in]-3, -1]$. Par conséquent, $f(]-3, -1]) = [1, 9[$.
2. On a $x \in f^{-1}([1, 4])$ si et seulement si $1 \leq x^2 \leq 4$, c'est-à-dire $1 \leq |x| \leq 2$. Donc $f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$. De plus, un carré est positif, donc aucun réel ne vérifie $x^2 \in [-2, -1]$: $f^{-1}([-2, -1]) = \emptyset$.
3. D'abord, $f([0, 1]) = [0, 1]$, car la fonction carré est croissante et continue sur $[0, 1]$, avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Ensuite, $x^2 \in [0, 1]$ équivaut à $|x| \leq 1$. Donc $f^{-1}(f([0, 1])) = [-1, 1]$, qui contient strictement $[0, 1]$. L'inclusion $A \subset f^{-1}(f(A))$ est donc stricte ici, faute d'injectivité.
4. On a $-1 \leq x^2 \leq 4$ si et seulement si $|x| \leq 2$, d'où $f^{-1}([-1, 4]) = [-2, 2]$. Puis $f([-2, 2]) = [0, 4]$ par le même raisonnement qu'à la question 1. Ainsi $f(f^{-1}([-1, 4])) = [0, 4]$, strictement inclus dans $[-1, 4]$. Les valeurs négatives sont perdues, car elles n'ont pas d'antécédent.

La figure ci-dessous résume ces calculs : à gauche l'image de $]-3, -1]$, à droite l'aller-retour par l'image réciproque puis l'image directe.



Point de méthode : pour une image réciproque, on écrit simplement la condition $f(x) \in C$ et on la

résout ; pour une image directe, on prouve deux inclusions, ou on utilise la monotonie et la continuité sur chaque intervalle.

Corrigé de l'exercice 3 : Une application entre ensembles finis

1. On lit les flèches du diagramme. D'une part, $f(\{1, 2, 3\}) = \{f(1), f(2), f(3)\} = \{a, c\}$. D'autre part, $f(\{3, 4, 5\}) = \{a, b, c\}$. Enfin, $f(\{1, 2, 3\}) = \{a, c\}$, $f(\{3, 4, 5\}) = \{a, b, c\}$ **et** $f(E) = \{a, b, c\}$.
2. On cherche les éléments dont l'image est dans la partie donnée. Ainsi $f^{-1}(\{a\}) = \{1, 3\}$, $f^{-1}(\{d\}) = \emptyset$ **et** $f^{-1}(\{a, b, d\}) = \{1, 3, 4\}$.
3. On a $\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3\}$, donc $f(\{3\}) = \{a\}$. Par ailleurs, $f(\{1, 2, 3\}) \cap f(\{3, 4, 5\}) = \{a, c\}$. **L'inclusion** $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ **est stricte** : $\{a\} \subsetneq \{a, c\}$. En effet, c provient de $2 \in A$ et de $5 \in B$, mais d'aucun élément commun.
4. On a $f(1) = f(3)$ avec $1 \neq 3$: f **n'est pas injective**. De plus, d n'a aucun antécédent, car $f^{-1}(\{d\}) = \emptyset$: f **n'est pas surjective**.
5. Une telle application $\tilde{f}$ vérifie $\tilde{f}(\{1, 2, 3, 4\}) = \{a, b, c\}$. Pour que d ait un antécédent, il faut donc $\tilde{f}(5) = d$. Réciproquement, ce choix rend $\tilde{f}$ surjective. **Il existe exactement une telle application.**

Corrigé de l'exercice 4 : Images et opérations ensemblistes

1. Soit $y \in F$. On a $y \in f(A \cup B)$ si et seulement s'il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. Cela équivaut à l'existence de $x \in A$ tel que $y = f(x)$, ou de $x \in B$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit, $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$. **Donc** $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. Soit $y \in f(A \cap B)$. Il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A$, on a

$y \in f(A)$; de même, $y \in f(B)$. D'où l'inclusion. Supposons maintenant f injective et soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $y = f(a) = f(b)$. L'injectivité donne $a = b$, donc $a \in A \cap B$ et $y \in f(A \cap B)$. Ainsi $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, avec égalité si f est injective.

- Pour $x \in E$, on a $x \in f^{-1}(C \cup D) \Leftrightarrow f(x) \in C \cup D \Leftrightarrow (f(x) \in C \text{ ou } f(x) \in D)$. Cette dernière assertion équivaut à $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. De même, $x \in f^{-1}(F \setminus C) \Leftrightarrow f(x) \notin C \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(C)$. **Les deux égalités sont établies.**
- Soit $a \in A$. Alors $f(a) \in f(A)$, donc $a \in f^{-1}(f(A))$: ainsi $A \subset f^{-1}(f(A))$. Pour la seconde égalité, soit d'abord $y \in f(f^{-1}(C))$. Il existe $x \in f^{-1}(C)$ tel que $y = f(x)$. Donc $y \in C$ et $y \in f(E)$. Inversement, soit $y \in C \cap f(E)$. On écrit $y = f(x)$ avec $x \in E$. Comme $f(x) \in C$, on a $x \in f^{-1}(C)$, donc $y \in f(f^{-1}(C))$. **Finalement, $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(C)) = C \cap f(E)$.**

Corrigé de l'exercice 5 : Injectivité et surjectivité de fonctions réelles

- Soit $y \in \mathbb{R}$. L'équation $3x - 2 = y$ admet l'unique solution $x = \frac{y+2}{3}$. Tout réel a donc exactement un antécédent. **f_1 est bijective et $f_1^{-1}(y) = \frac{y+2}{3}$.**
- On a $f_2(-1) = f_2(1) = 2$, donc f_2 n'est pas injective. De plus, $x^2 + 1 \geq 1$ pour tout réel x , donc 0 n'a pas d'antécédent. **f_2 n'est ni injective, ni surjective.**
- D'abord, f_3 est bien à valeurs dans $[1, +\infty[$. Soient $x, x' \geq 0$ tels que $x^2 + 1 = x'^2 + 1$. Alors $x^2 = x'^2$, donc $|x| = |x'|$, puis $x = x'$ puisque les deux sont positifs. Ensuite, pour $y \geq 1$, le réel $x = \sqrt{y-1}$ est positif et vérifie $f_3(x) = y$. **f_3 est bijective et $f_3^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$.**
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc injective : si $x \neq x'$, par exemple $x < x'$, alors $e^x < e^{x'}$. En revanche, $e^x > 0$, donc -1 n'a pas d'antécédent. **f_4 est injective mais pas surjective.** Remarquez qu'elle devient bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$, de réciproque $\ln$.
- On a $f_5(0) = f_5(1) = 0$, donc f_5 n'est pas injective. Soit maintenant $y \in \mathbb{R}$. La fonction $\varphi : x \rightarrow x^3 - x - y$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $x^3 - x = x^3 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$ pour $x \neq 0$,

donc φ tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires fournit un réel x tel que $\varphi(x) = 0$, c'est-à-dire $f_5(x) = y$. **f_5 est surjective mais pas injective.**

Point de méthode : la même formule peut définir une application bijective ou non selon les ensembles de départ et d'arrivée, comme le montrent f_2 et f_3 .

Corrigé de l'exercice 6 : Applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$

- Si $2n = 2n'$, alors $n = n'$: f est injective. Cependant, 1 est impair, donc il n'a pas d'antécédent par f . **f est injective, non surjective.** Ensuite, pour $m \in \mathbb{N}$, on a $g(2m) = m$, donc g est surjective. En revanche, $g(0) = g(1) = 0$. **g est surjective, non injective.**
- Pour tout n , on a $(g \circ f)(n) = \lfloor 2n/2 \rfloor = n$, donc $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$. En revanche, $(f \circ g)(n) = 2 \lfloor n/2 \rfloor$ vaut n si n est pair et $n - 1$ si n est impair. Par exemple, $(f \circ g)(1) = 0$. **Ainsi $f \circ g \neq \text{Id}_{\mathbb{N}}$.** Ce calcul confirme le cours : $g \circ f$ injective force f injective, et $g \circ f$ surjective force g surjective. Cependant, une seule égalité avec l'identité ne suffit pas à conclure à la bijectivité.
- D'abord, h est bien à valeurs dans $\mathbb{N}$, car un entier impair vérifie $n \geq 1$. Si n est pair, $h(n) = n + 1$ est impair, donc $h(h(n)) = n + 1 - 1 = n$. Si n est impair, $h(n) = n - 1$ est pair, donc $h(h(n)) = n - 1 + 1 = n$. Par conséquent, $h \circ h = \text{Id}_{\mathbb{N}}$. D'après le théorème de caractérisation des bijections, avec $g = h$, **h est bijective et $h^{-1} = h$.**

Corrigé de l'exercice 7 : Deux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

- Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. On résout le système d'inconnue (x, y) :

$$\begin{cases} x + y = u \\ x - y = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

On obtient par addition puis soustraction une unique solution. Tout couple a donc exactement un antécédent. φ **est bijective et** $\varphi^{-1}(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$.

- On a $\psi(1, 2) = (3, 2) = \psi(2, 1)$ alors que $(1, 2) \neq (2, 1)$. ψ **n'est pas injective**.
- Supposons $\psi(x,y) = (0, 1)$. Alors $y = -x$, puis $xy = -x^2 = 1$, ce qui est impossible.
Le couple $(0, 1)$ n'a pas d'antécédent : ψ n'est pas surjective.
- Soit $(s,p) = \psi(x,y)$. Alors $s^2 - 4p = (x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2 \geq 0$. Réciproquement, soit (s,p) tel que $\Delta = s^2 - 4p \geq 0$. On pose $x = \frac{s+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $y = \frac{s-\sqrt{\Delta}}{2}$. Alors $x+y = s$, et $xy = \frac{s^2-\Delta}{4} = p$. Donc $(s,p) = \psi(x,y)$. **Ainsi**
 $\psi(\mathbb{R}^2) = \{(s,p) \mid s^2 \geq 4p\}$. On retrouve que $(0, 1)$ n'est pas atteint, car $0 - 4 < 0$.

Corrigé de l'exercice 8 : Une homographie bijective

- Pour $x \neq 1$, on écrit $2x + 1 = 2(x - 1) + 3$. Donc $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$. **On a $\alpha = 2$ et $\beta = 3$.**
- Le quotient $\frac{3}{x-1}$ n'est jamais nul, car son numérateur vaut 3. **Donc $f(x) \neq 2$ pour tout $x \neq 1$** , et f définit bien une application de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- Soit $y \neq 2$. Pour $x \neq 1$, on a les équivalences suivantes :

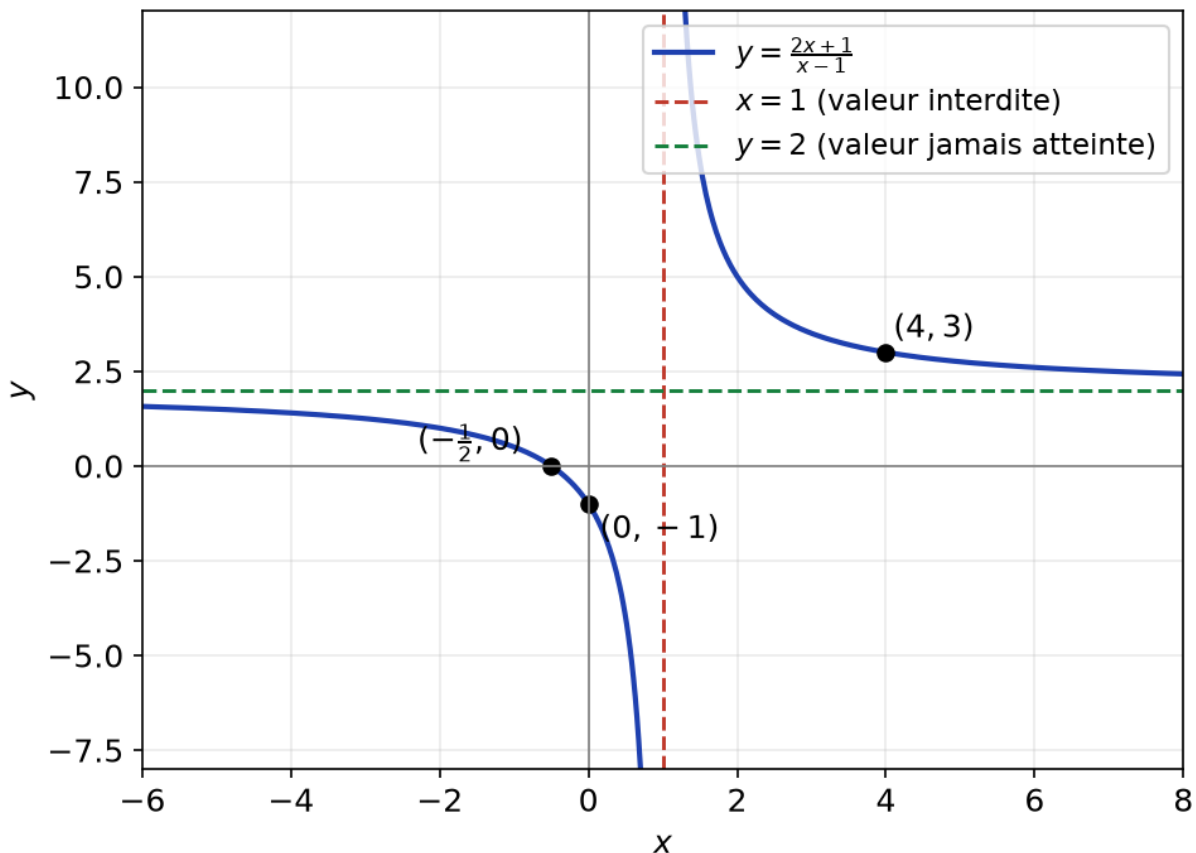
$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{3}{x-1} = y - 2 \Leftrightarrow x - 1 = \frac{3}{y-2} \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-2}.$$

La deuxième équivalence utilise $y - 2 \neq 0$. De plus, la solution trouvée est différente de 1, puisque $\frac{3}{y-2} \neq 0$. Chaque $y \neq 2$ possède donc un unique antécédent. f **est bijective et**
 $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-2}$.

- Si $x > 1$, alors $x - 1 > 0$, donc $\frac{3}{x-1} > 0$ et $f(x) > 2$. Réciproquement, si $y > 2$, on

a $f^{-1}(y) = 1 + \frac{3}{y-2} > 1$. **Donc** $f(]1, +\infty[) =]2, +\infty[$. Ensuite, $3 \leq f(x) \leq 5$ équivaut à $1 \leq \frac{3}{x-1} \leq 3$. Ce quotient étant positif, on a $x - 1 > 0$. La fonction inverse étant décroissante sur $]0, +\infty[$, l'encadrement équivaut à $1 \leq x - 1 \leq 3$. **Ainsi** $f^{-1}([3, 5]) = [2, 4]$; on vérifie que $f(2) = 5$ et $f(4) = 3$.

Comme le montre la figure ci-dessous, la courbe ne coupe jamais l'asymptote horizontale $y = 2$: c'est exactement la valeur exclue de l'ensemble d'arrivée.



Corrigé de l'exercice 9 : Composition, injectivité et surjectivité

- Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. En appliquant g , on obtient $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Comme $g \circ f$ est injective, $x = x'$. **Donc f est injective.**

2. Soit $z \in G$. Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $g(f(x)) = z$. Ainsi, $y = f(x)$ est un antécédent de z par g . **Donc g est surjective.**
3. Prenons $E = \{0\}$, $F = \{0, 1\}$, $G = \{0\}$, $f(0) = 0$ et $g(0) = g(1) = 0$. Alors $g \circ f : \{0\} \rightarrow \{0\}$ est bijective. Pourtant, 1 n'a pas d'antécédent par f , et $g(0) = g(1)$.
Ce contre-exemple convient : f n'est pas surjective et g n'est pas injective.
4. Soient $y, y' \in F$ tels que $g(y) = g(y')$. Par surjectivité de f , on écrit $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Alors $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, donc $x = x'$ par injectivité de $g \circ f$. Par conséquent, $y = y'$. **L'application g est injective.**
5. Soit $y \in F$. Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $g(f(x)) = g(y)$. L'injectivité de g donne alors $f(x) = y$. **Donc f est surjective.**

Point de méthode : pour retenir les questions 1 et 2, pensez que l'injectivité « se lit à l'entrée » de la composée et la surjectivité « à la sortie ».

Corrigé de l'exercice 10 : Bijectivité par la composition

1. Posons $g = f \circ f$. Par associativité, $g \circ f = f \circ f \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = f \circ f \circ f = \text{Id}_E$. D'après le théorème de caractérisation des bijections, **f est bijective et $f^{-1} = f \circ f$.**
2. Soit $x \in D$. Comme $x \neq 1$, le réel $u(x) = \frac{1}{1-x}$ est défini. Il est non nul, car son numérateur vaut 1. De plus, $u(x) = 1$ équivaudrait à $1 - x = 1$, soit $x = 0$, valeur exclue. **Donc $u(x) \in D$, et u est une application de D dans D .**
3. Pour $x \in D$, on calcule $1 - u(x) = \frac{1-x-1}{1-x} = \frac{-x}{1-x}$. Comme $x \neq 0$, on obtient :

$$u(u(x)) = \frac{1-x}{-x} = \frac{x-1}{x}, \quad u(u(u(x))) = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x.$$

Donc $u \circ u \circ u = \text{Id}_D$. D'après la question 1, **u est bijective et**
 $u^{-1}(x) = (u \circ u)(x) = \frac{x-1}{x}$. On vérifie directement que $u\left(\frac{x-1}{x}\right) = x$.
4. Comme $g \circ f$ est injective, f est injective (exercice 9). Comme $f \circ g$ est surjective, f est

surjective. De même, $f \circ g$ injective entraîne g injective, et $g \circ f$ surjective entraîne g surjective. **Ainsi f et g sont bijectives.**

Corrigé de l'exercice 11 : Caractériser l'injectivité par les images

- Supposons f injective et soit $A \subset E$. On sait déjà que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Alors $f(x) \in f(A)$, donc $f(x) = f(a)$ pour un $a \in A$. L'injectivité donne $x = a \in A$. D'où l'égalité. Inversement, supposons l'égalité vraie pour toute partie. Soient x, x' tels que $f(x') = f(x)$. Avec $A = \{x\}$, on a $x' \in f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$, donc $x' = x$. **L'équivalence est démontrée.**
- Supposons f surjective. D'après l'exercice 4, $f(f^{-1}(C)) = C \cap f(E) = C \cap F = C$. Inversement, si l'égalité vaut pour toute partie, on l'applique à $C = F$. On obtient $f(f^{-1}(F)) = f(E) = F$. **Donc f est surjective, et l'équivalence est démontrée.**
- Le sens direct découle de l'exercice 4. Pour la réciproque, raisonnons par contraposée. Supposons qu'il existe $x \neq x'$ tels que $f(x) = f(x')$. Posons $A = \{x\}$ et $B = \{x'\}$. Alors $A \cap B = \emptyset$, donc $f(A \cap B) = \emptyset$. En revanche, $f(A) \cap f(B) = \{f(x)\}$ n'est pas vide. **L'égalité échoue pour ces parties, ce qui prouve l'équivalence.**

Corrigé de l'exercice 12 : Propriétés de quelques relations binaires

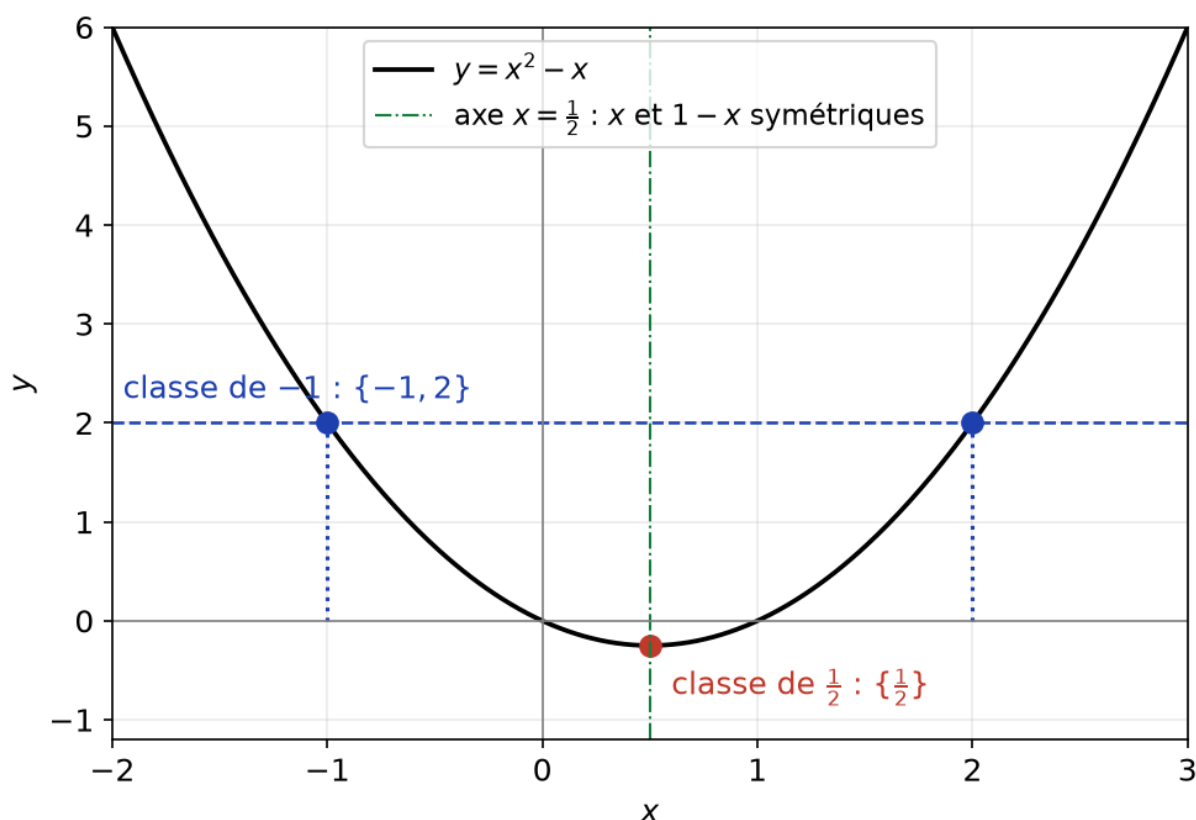
- La relation $\leq$ est réflexive, antisymétrique et transitive. Elle n'est pas symétrique, car $0 \leq 1$ mais $1 \not\leq 0$. **$\mathcal{R}_1$ est une relation d'ordre, et même d'ordre total.**
- On a $|x - x| = 0 \leq 1$: réflexivité. Puis $|y - x| = |x - y|$: symétrie. En revanche, $0 \mathcal{R}_2 \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \mathcal{R}_2 0$ alors que $0 \not\leq \frac{1}{2}$: pas d'antisymétrie. Enfin, $0 \mathcal{R}_2 1$ et $1 \mathcal{R}_2 2$, mais $|0 - 2| = 2 > 1$: pas de transitivité. **$\mathcal{R}_2$ n'est ni une relation d'équivalence, ni une relation d'ordre.**

3. D'abord, $x - x = 0$ est pair. Ensuite, si $x - y$ est pair, $y - x = -(x - y)$ l'est aussi. De plus, $x - z = (x - y) + (y - z)$ est pair comme somme de deux nombres pairs. En revanche, $0 \mathcal{R}_3 2$ et $2 \mathcal{R}_3 0$: pas d'antisymétrie. **$\mathcal{R}_3$ est une relation d'équivalence ; ses deux classes sont l'ensemble des entiers pairs et celui des entiers impairs.**
4. On a $0 \times 0 = 0$, donc 0 n'est pas en relation avec lui-même : pas de réflexivité. La symétrie est claire, car $xy = yx$. Pour la transitivité, supposons $xy > 0$ et $yz > 0$. Alors $y \neq 0$, et $xz \cdot y^2 = (xy)(yz) > 0$ avec $y^2 > 0$, d'où $xz > 0$. Enfin, $1 \mathcal{R}_4 2$ et $2 \mathcal{R}_4 1$: pas d'antisymétrie. **$\mathcal{R}_4$ est symétrique et transitive, mais ni réflexive ni antisymétrique.** Sur $\mathbb{R}^*$, elle devient une relation d'équivalence de classes $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
5. Soit $a \in E$. La partie $\{a\}$ vérifie $\{a\} \cap \{a\} \neq \emptyset$: pas de réflexivité. La symétrie découle de $A \cap B = B \cap A$. Ensuite, $\emptyset \mathcal{R}_5 \{a\}$ et $\{a\} \mathcal{R}_5 \emptyset$, avec $\emptyset \neq \{a\}$: pas d'antisymétrie. Enfin, $\{a\} \mathcal{R}_5 \emptyset$ et $\emptyset \mathcal{R}_5 \{a\}$, mais pas $\{a\} \mathcal{R}_5 \{a\}$: pas de transitivité. **$\mathcal{R}_5$ est seulement symétrique.**

Corrigé de l'exercice 13 : Classes d'équivalence dans le plan et sur $\mathbb{R}$

1. Posons $N(x,y) = y - x^2$. La relation s'écrit $N(u) = N(u')$. Elle est donc réflexive, symétrique et transitive, comme l'égalité. La classe de (x_0, y_0) est l'ensemble des (x,y) tels que $y = x^2 + c$, avec $c = y_0 - x_0^2$. **Les classes sont les paraboles d'équation $y = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$, translatées verticalement de la parabole $y = x^2$.** Elles forment une partition du plan.
2. Posons $\varphi(x) = x^2 - x$. On a $x \mathcal{S} y \Leftrightarrow x^2 - x = y^2 - y \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$. **Pour la même raison, $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.**
3. On factorise : $x^2 - y^2 - (x - y) = (x - y)(x + y - 1)$. Donc $x \mathcal{S} y$ équivaut à $y = x$ ou $y = 1 - x$. **La classe de x est $\{x, 1 - x\}$.** Elle est réduite à un élément si et seulement si $x = 1 - x$. **Seule la classe de $\frac{1}{2}$ est un singleton.**

La figure ci-dessous interprète ce résultat : x et $1 - x$ sont symétriques par rapport à l'axe $x = \frac{1}{2}$ de la parabole $y = x^2 - x$. Ils ont donc la même image, et une droite horizontale coupe la courbe en une classe.



Corrigé de l'exercice 14 : Congruence modulo 5

1. D'abord, 5 divise $0 = a - a$: réflexivité. Ensuite, si $b - a = 5k$, alors $a - b = 5(-k)$: symétrie. Enfin, si $b - a = 5k$ et $c - b = 5l$, alors $c - a = 5(k + l)$: transitivité. **La congruence modulo 5 est une relation d'équivalence.**
2. La division euclidienne écrit tout entier $a = 5q + r$ avec $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Alors $a - r = 5q$, donc $a \in \bar{r}$. Par ailleurs, si $0 \leq r < r' \leq 4$, la différence $r' - r$ est comprise entre 1 et 4, donc non divisible par 5 : les classes $\bar{0}, \dots, \bar{4}$ sont distinctes. **Il y a exactement cinq classes, et elles forment une partition de $\mathbb{Z}$** d'après le théorème du cours. Enfin, $\bar{2} = \left\{ \begin{smallmatrix} 5k \\ 2 \end{smallmatrix} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$, d'où $\bar{2} \cap [-10, 10] = \{-8, -3, 2, 7\}$.
3. On a $17 = 3 \times 5 + 2$, $-3 = (-1) \times 5 + 2$ et $2026 = 405 \times 5 + 1$. **Donc 17 et -3 sont dans $\bar{2}$, et 2026 est dans $\bar{1}$.**
4. Écrivons $a' = a + 5k$ et $b' = b + 5l$. Alors $(a' + b') - (a + b) = 5(k + l)$. De plus

:

$$a' b' - ab = (a' - a) b' + a (b' - b) = 5(k b' + a l).$$

La congruence est donc compatible avec l'addition et la multiplication.

5. Si $n \equiv r \pmod{5}$, la question 4 donne $n^2 \equiv r^2 \pmod{5}$. Or $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9 \equiv 4$ et $4^2 = 16 \equiv 1$. **Ainsi n^2 appartient à $\bar{0}$, $\bar{1}$ ou $\bar{4}$.** Par conséquent, $n^2 + 2$ appartient à $\bar{2}$, $\bar{3}$ ou $\bar{1}$, jamais à $\bar{0}$. **Donc $n^2 + 2$ n'est jamais divisible par 5.**

Corrigé de l'exercice 15 : Relation d'équivalence associée à une application

1. L'égalité dans F est réflexive, symétrique et transitive. Par conséquent, $f(x) = f(x)$, puis $f(x) = f(x') \Rightarrow f(x') = f(x)$, et enfin $f(x) = f(x')$ et $f(x') = f(x'')$ entraînent $f(x) = f(x'')$. **$\mathcal{R}_f$ est une relation d'équivalence.**
2. Par définition, $\bar{x} = \{x' \in E \mid f(x') = f(x)\} = \{x' \mid f(x') \in \{f(x)\}\}$. **Donc $\bar{x} = f^{-1}(\{f(x)\})$.** Toutes les classes sont des singletons si et seulement si $f(x') = f(x)$ entraîne $x' = x$. **C'est le cas si et seulement si f est injective.**
3. Il faut vérifier que deux représentants d'une même classe donnent la même valeur. Supposons $\bar{x} = \bar{x'}$. Alors $x' \in \bar{x}$, donc $x \mathcal{R}_f x'$, c'est-à-dire $f(x) = f(x')$. **La valeur $f(x)$ ne dépend que de la classe : $\bar{f}$ est bien définie.**
4. Soit $y \in f(E)$. On écrit $y = f(x)$, et alors $\bar{f}(\bar{x}) = y$: $\bar{f}$ est surjective. Ensuite, si $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x'})$, on a $f(x) = f(x')$, donc $x \mathcal{R}_f x'$ et $\bar{x} = \bar{x'}$: $\bar{f}$ est injective. **$\bar{f}$ est une bijection de $E / \mathcal{R}_f$ sur $f(E)$.** On en déduit la décomposition $f = i \circ \bar{f} \circ \pi$, où $\pi : x \rightarrow \bar{x}$ est surjective et $i : f(E) \rightarrow F$ est l'inclusion, injective.
5. Ici, $(x, y) \mathcal{R}_f (x', y')$ équivaut à $x + y = x' + y'$. La classe de (x_0, y_0) est la droite Δ_c d'équation $x + y = c$, avec $c = x_0 + y_0$. De plus, $f(E) = \mathbb{R}$, car $f(c, 0) = c$. **Les classes sont les droites de pente -1 , et $\bar{f}$ associe à la droite Δ_c le réel c .**

Point de méthode : pour définir une application sur un ensemble quotient, vérifiez toujours que le résultat ne dépend pas du représentant choisi.

Corrigé de l'exercice 16 : Divisibilité et diagramme de Hasse

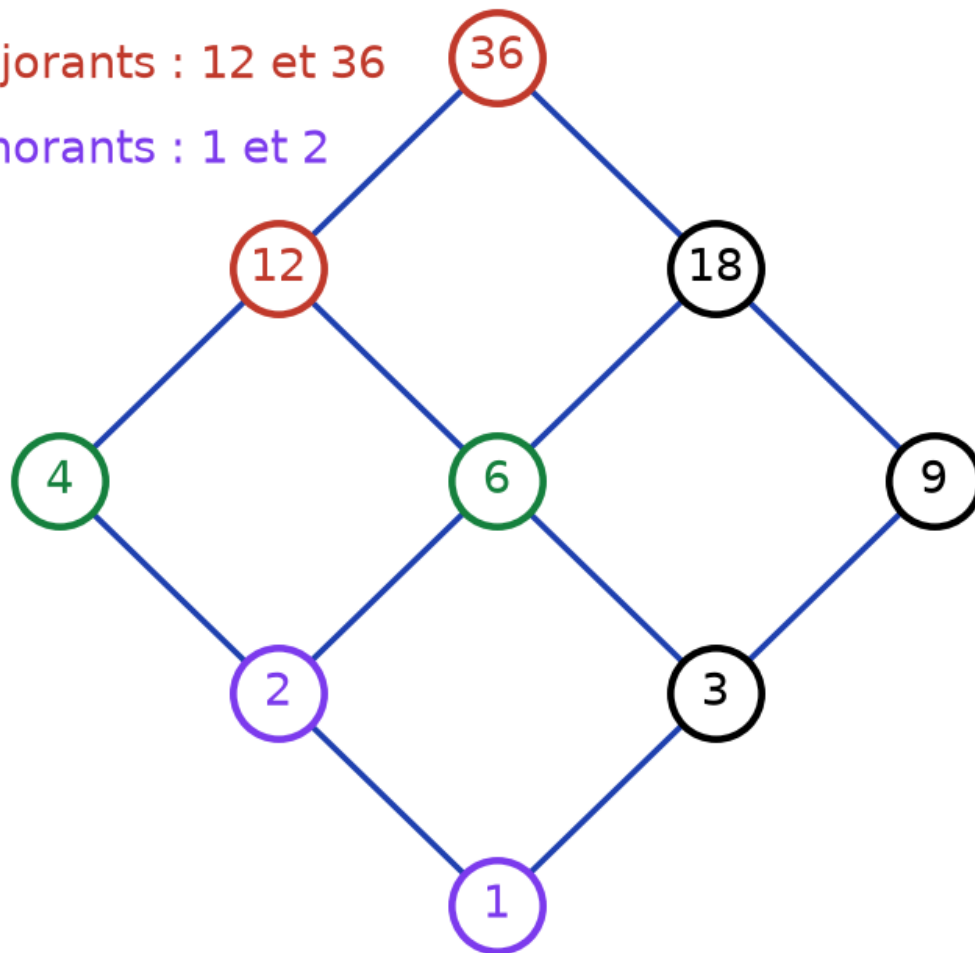
- On a $a = 1 \times a$, donc $a \mid a$. Si $a \mid b$ et $b \mid a$ dans $\mathbb{N}^*$, alors $a \leq b$ et $b \leq a$, car un diviseur d'un entier strictement positif lui est inférieur. Donc $a = b$. Enfin, $b = ka$ et $c = lb$ donnent $c = (kl)a$. **La divisibilité est un ordre sur $\mathbb{N}^*$; il est partiel, car $2 \nmid 3$ et $3 \nmid 2$.**
- Sur $\mathbb{Z}$, on a $2 \mid -2$ et $-2 \mid 2$, mais $2 \neq -2$. **L'antisymétrie échoue : ce n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$.**
- Comme $36 = 2^2 \times 3^2$, on a $D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$. Dans le diagramme, on relie d à $2d$ et à $3d$ lorsqu'ils divisent 36 . **On obtient le treillis carré représenté ci-dessous.**
- Un majorant de A est un multiple commun de 4 et 6 , donc un multiple de 12 . Dans D_{36} , **les majorants de A sont 12 et 36** . Un minorant est un diviseur commun de 4 et 6 . **Les minorants de A sont 1 et 2** . Aucun majorant n'appartient à A , ni aucun minorant. **La partie A n'a ni plus grand, ni plus petit élément.**
- Un majorant de B est un multiple de 4 et de 9 , donc de 36 : **le seul majorant est 36** . Un minorant divise 2 et 3 , donc divise 1 : **le seul minorant est 1** . Comme $36 \notin B$ et $1 \notin B$, **la partie B n'a ni plus grand, ni plus petit élément.**

La figure ci-dessous montre le diagramme de Hasse de D_{36} . Les majorants de A sont situés au-dessus de 4 et de 6 , les minorants en dessous des deux.

$A = \{4, 6\}$

majorants : 12 et 36

minorants : 1 et 2



Corrigé de l'exercice 17 : Ordre produit et ordre lexicographique

1. Chaque propriété de $\preceq_{\overline{P}}$ découle de celle de $\leq$, coordonnée par coordonnée. D'abord, $x \leq x$ et $y \leq y$. Ensuite, deux inégalités larges opposées donnent $x = x'$ et $y = y'$. Enfin, la transitivité se vérifie sur chaque coordonnée. En revanche, $(0, 1)$ et $(1, 0)$ sont incomparables.
 $\preceq_{\overline{P}}$ est un ordre partiel.

2. Réflexivité : $x = x$ et $y \leq y$. Antisymétrie : supposons $(x, y) \preceq_{\overline{L}} (x', y')$ et $(x', y') \preceq_{\overline{L}} (x, y)$. Les deux relations donnent $x \leq x'$ et $x' \leq x$, donc $x = x'$. Alors

$y \leq y'$ et $y' \leq y$, d'où $y = y'$. Transitivité : supposons $(x,y) \leq_L (x',y') \leq_L (x'',y'')$. On a $x \leq x' \leq x''$. Si $x < x''$, c'est terminé. Sinon, $x = x' = x''$, et alors $y \leq y' \leq y''$. Totalité : si $x \neq x'$, le plus petit des deux fixe l'ordre ; si $x = x'$, on compare y et y' . $\leq_L$ est un ordre total.

- On a $1 \leq 2$ mais $5 > 0$, et $2 > 1$. **Pour l'ordre produit, $(1,5)$ et $(2,0)$ sont incomparables.** En revanche, $1 < 2$ suffit pour l'ordre lexicographique : $(1,5) \leq_L (2,0)$.
- Soit (a,b) un majorant de D . Comme $(1,0) \in D$, on a $a \geq 1$; comme $(0,1) \in D$, on a $b \geq 1$. Inversement, si $a \geq 1$ et $b \geq 1$, tout $(x,y) \in D$ vérifie $x \leq |x| \leq 1 \leq a$ et, de même, $y \leq b$. **Les majorants de D sont les couples (a,b) avec $a \geq 1$ et $b \geq 1$.** Un tel couple vérifie $a^2 + b^2 \geq 2 > 1$, donc n'appartient pas à D . **La partie D n'a pas de plus grand élément pour l'ordre produit.**
- Soit $(x,y) \in D$. Alors $x^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1$, donc $x \leq 1$. Si $x < 1$, on a $(x,y) \leq_L (1,0)$. Si $x = 1$, alors $y^2 \leq 0$, donc $y = 0$. Ainsi $(1,0)$ majore D et appartient à D . Le même raisonnement avec $x \geq -1$ s'applique à $(-1,0)$. **Pour l'ordre lexicographique, D a pour plus grand élément $(1,0)$ et pour plus petit élément $(-1,0)$.**

Corrigé de l'exercice 18 : Inclusion sur les parties d'un ensemble

- Toute partie est incluse dans elle-même. Deux inclusions réciproques donnent l'égalité : c'est le principe de double inclusion. Enfin, $A \subset B$ et $B \subset C$ entraînent $A \subset C$. **L'inclusion est un ordre ; il n'est pas total, car $\{1\}$ et $\{2\}$ sont incomparables.**
- Une partie M majore $\mathcal{A}$ si et seulement si $\{1\} \subset M$ et $\{2\} \subset M$, c'est-à-dire $\{1,2\} \subset M$. **Les majorants sont $\{1,2\}$ et $\{1,2,3\}$, et le plus petit d'entre eux est $\{1,2\}$.** De même, m minore $\mathcal{A}$ si et seulement si $m \subset \{1\} \cap \{2\} = \emptyset$. **Le seul minorant est $\emptyset$.**
- Un plus petit élément de $\mathcal{B}$ serait inclus dans $\{1\}$ et dans $\{2\}$, donc vide. Or $\emptyset \notin \mathcal{B}$. **$\mathcal{B}$ n'a pas de plus petit élément.** En revanche, $E \in \mathcal{B}$ contient toutes les parties de E . **Le plus grand élément de $\mathcal{B}$ est E .**

4. D'abord, $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$: la partie $A \cup B$ majore $\{A, B\}$. Ensuite, si M majore $\{A, B\}$, alors $A \subset M$ et $B \subset M$, donc $A \cup B \subset M$. **La partie $A \cup B$ est un majorant inclus dans tous les autres : c'est le plus petit élément de l'ensemble des majorants.**

Corrigé de l'exercice 19 : Ordre sur les fonctions réelles

1. Pour tout x , $f(x) \leq f(x)$: réflexivité. Si $f \leq g$ et $g \leq f$, alors $f(x) = g(x)$ pour tout x , donc $f = g$: antisymétrie. Enfin, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour tout x donne la transitivité. **C'est une relation d'ordre sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.**
2. On a $f(1) = 1 > 0 = g(1)$, donc $f \leq g$ est faux. De même, $f(-1) = -1 < 0 = g(-1)$, donc $g \leq f$ est faux. **Les fonctions f et g sont incomparables : l'ordre n'est pas total.**
3. Une fonction k majore $\{f, g\}$ si et seulement si, pour tout x , $k(x) \geq x$ et $k(x) \geq 0$, c'est-à-dire $k(x) \geq \max(x, 0) = h(x)$. **Les majorants sont les fonctions k telles que $k \geq h$.** En particulier, h est un majorant, et elle est inférieure à tous les autres. **Donc h est le plus petit des majorants de $\{f, g\}$.**
4. De même, k minore $\{f, g\}$ si et seulement si $k(x) \leq \min(x, 0)$ pour tout x . **Le plus grand des minorants est la fonction $x \rightarrow \min(x, 0)$.**

Corrigé de l'exercice 20 : Théorème de Cantor

1. Supposons $\{x\} = \{x'\}$. Alors $x \in \{x'\}$, donc $x = x'$. **L'application j est injective.**
2. Raisonnons par l'absurde et supposons $A = \varphi(a)$ pour un certain $a \in E$. Si $a \in A$, la définition de A donne $a \notin \varphi(a) = A$, ce qui est contradictoire. Si $a \notin A$, alors $a \notin \varphi(a)$, donc $a \in A$ par définition, encore une contradiction. **Par conséquent, A n'a pas d'antécédent par φ .**

3. Toute application $\varphi : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ manque au moins la partie A . **Il n'existe donc aucune surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$, a fortiori aucune bijection.** Avec $E = \mathbb{N}$, on obtient qu'il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
4. On a $1 \in \varphi(1)$, donc $1 \notin A$. En revanche, $2 \notin \varphi(2) = \emptyset$, donc $2 \in A$. Ainsi $A = \{2\}$, qui diffère de $\varphi(1) = \{1, 2\}$ et de $\varphi(2) = \emptyset$. Le résultat de la question 2 est bien vérifié.

Point de méthode : cet argument, dit diagonal, construit un objet qui diffère de chaque $\varphi(x)$ « en x ». Il reviendra en théorie des ensembles et en calculabilité.

Corrigé de l'exercice 21 : Problème : une bijection entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$

1. Existence. L'ensemble $K = \{k \in \mathbb{N} \mid 2^k \text{ divise } n\}$ contient 0. Il est majoré par n , car $2^k \mid n$ entraîne $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Il possède donc un plus grand élément p . On écrit $n = 2^p m$. L'entier $m \geq 1$ est impair, sinon 2^{p+1} diviserait n . Ainsi $m = 2q + 1$ avec $q \in \mathbb{N}$. Unicité. Supposons $2^p(2q+1) = 2^{p'}(2q'+1)$ avec, par exemple, $p < p'$. En divisant par 2^p , on obtient $2q+1 = 2^{p'-p}(2q'+1)$: un nombre impair égal à un nombre pair, c'est absurde. Donc $p = p'$, puis $2q+1 = 2q'+1$ et $q = q'$. **Tout $n \geq 1$ s'écrit de façon unique $2^p(2q+1)$.**
2. La question 1 dit exactement que tout $n \in \mathbb{N}^*$ possède un unique antécédent par φ . Donc φ est bijective. Par ailleurs, $\tau : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto n-1$ est bijective, de réciproque $n \mapsto n+1$. **Comme composée de deux bijections, $\psi = \tau \circ \varphi$ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.**
3. On calcule $\psi(0, 0) = 1 - 1 = 0$ et $\psi(3, 2) = 8 \times 5 - 1 = 39$. Pour trouver l'antécédent de m , on décompose $m+1$. D'abord, $12 = 2^2 \times 3$, donc $11 = \psi(2, 1)$. Ensuite, $48 = 2^4 \times 3$, donc $47 = \psi(4, 1)$. Enfin, 101 est impair et $101 = 2 \times 50 + 1$, donc $100 = \psi(0, 50)$. **Ainsi $\psi(0, 0) = 0$, $\psi(3, 2) = 39$, et les antécédents de 11, 47, 100 sont $(2, 1)$, $(4, 1)$, $(0, 50)$.**
4. On a $\psi(0, q) = 2q + 1 - 1 = 2q$. Lorsque q décrit $\mathbb{N}$, on obtient tous les entiers pairs. **Donc $\psi(\{0\} \times \mathbb{N}) = 2\mathbb{N}$.** Pour $p \geq 1$, l'entier $2^p(2q+1)$ est pair, donc $\psi(p, q)$ est impair. Comme ψ est bijective, l'image du complémentaire de $\{0\} \times \mathbb{N}$ est le complémentaire

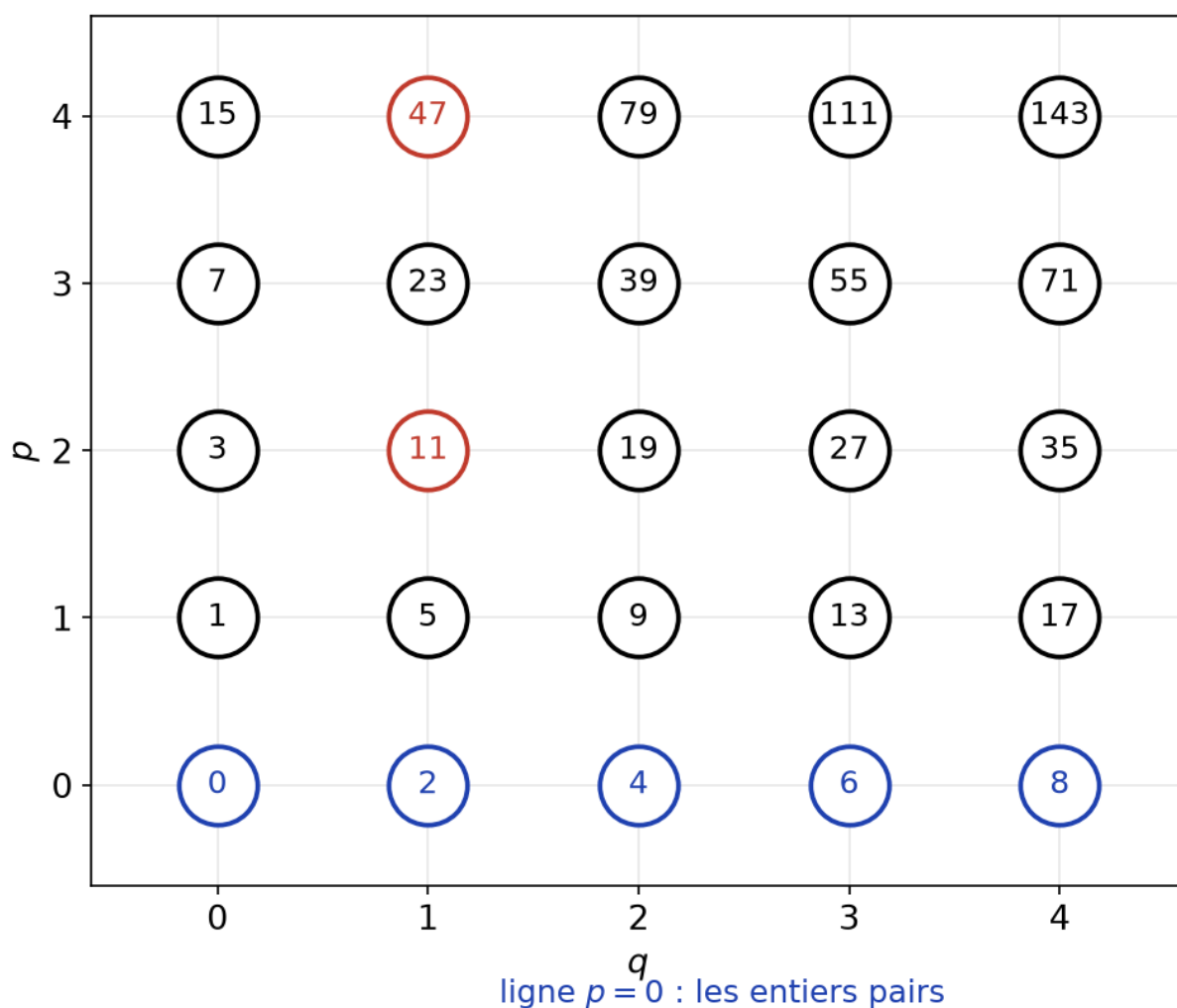
de $2\mathbb{N}$. **Donc** $\psi(\mathbb{N}^* \times \mathbb{N})$ **est l'ensemble des entiers impairs.**

5. Posons $k: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, avec $k(m) = 2m$ si $m \geq 0$ et $k(m) = -2m - 1$ si $m < 0$. Si $m \geq 0$, $k(m)$ est pair, donc $g(k(m)) = m$. Si $m < 0$, $k(m) = -2m - 1$ est impair et positif, donc $g(k(m)) = -\frac{-2m-1+1}{2} = m$. Inversement, si n est pair, $g(n) = \frac{n}{2} \geq 0$ et $k(g(n)) = n$. Si n est impair, $g(n) = -\frac{n+1}{2} < 0$ et $k(g(n)) = (n+1) - 1 = n$. **Donc** g **est bijective et** $g^{-1} = k$.

6. La composée $g \circ \psi$ de deux bijections est une bijection. $g \circ \psi$ **est une bijection de** $\mathbb{N}^2$ **sur** $\mathbb{Z}$, **et** $(g \circ \psi)(2, 1) = g(11) = -6$. Enfin, $\theta: (a, b, c) \rightarrow (\psi(a, b), c)$ est une bijection de $\mathbb{N}^3$ sur $\mathbb{N}^2$, de réciproque $(m, c) \rightarrow (\psi^{-1}(m), c)$. **Par composition,** $\psi \circ \theta: (a, b, c) \rightarrow \psi(\psi(a, b), c)$ **est une bijection de** $\mathbb{N}^3$ **sur** $\mathbb{N}$.

La figure ci-dessous dresse le tableau des valeurs de ψ pour $p, q \leq 4$. Chaque entier y apparaît au plus une fois, et la première ligne contient les entiers pairs, conformément à la question 4.

valeur de $\psi(p, q) = 2^p(2q + 1) - 1$



Corrigé de l'exercice 22 : Relations d'équivalence sur un ensemble à trois éléments

- On classe les partitions selon le nombre de parties. Avec trois parties, on obtient $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$. Avec deux parties, l'une a deux éléments et l'autre un seul : $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$ et $\{\{2, 3\}, \{1\}\}$. Avec une partie, on obtient $\{E\}$. **L'ensemble E possède exactement cinq partitions.**
- Une relation d'équivalence est déterminée par ses classes, qui forment une partition. Inversement, toute partition définit la relation « appartenir à la même partie ». **Il y a donc cinq relations d'équivalence sur E .** Pour la partition $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, le graphe est

$$\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}.$$

3. On a $1 \mathcal{R} 2$ et $2 \mathcal{R} 3$, mais $(1, 3)$ n'est pas dans le graphe. **La relation n'est pas transitive, donc ce n'est pas une relation d'équivalence.** Toute relation d'équivalence qui la contient vérifie $1 \sim 2$ et $2 \sim 3$, donc $1 \sim 3$: ses éléments sont tous dans la même classe. **La plus petite relation d'équivalence qui la contient est $E \times E$ tout entier, soit neuf couples.**

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [applications et relations, cours de maths en L1](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L1 sur applications et relations](#)
- À maîtriser avant : [Logique, raisonnement et ensembles](#)
- Chapitre précédent : [Logique, raisonnement et ensembles](#)
- Chapitre suivant : [Entiers naturels, récurrence et dénombrement](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)