

Comment trouver une primitive ?

LA RÉPONSE COURTE

Chercher une primitive, c'est **remonter une dérivation** : on cherche F telle que $F' = f$. On s'appuie sur les primitives de référence et sur les formes reconnaissables $u'u^n$, $\frac{u'}{u}$ et $u'e^u$. Toutes les primitives diffèrent d'une constante.

La méthode en 5 étapes

1. Reconnaître une forme de référence

x^n a pour primitive $\frac{x^{n+1}}{n+1}$; $\frac{1}{x}$ a pour primitive $\ln|x|$; e^x est sa propre primitive.

2. Chercher une forme en u

$u'u^n$ donne $\frac{u^{n+1}}{n+1}$; $\frac{u'}{u}$ donne $\ln|u|$; $u'e^u$ donne e^u . On repère d'abord u , puis on vérifie que u' est bien présent en facteur.

3. Ajuster le coefficient

Si le facteur u' manque d'une constante, on la compense : pour xe^{x^2} , avec $u = x^2$ et $u' = 2x$, la primitive est $\frac{1}{2}e^{x^2}$.

4. Ajouter la constante

On écrit $+ C$: il existe une infinité de primitives, toutes égales à une constante près.

5. Vérifier en dérivant

On dérive la primitive trouvée : on doit retomber exactement sur f . C'est une vérification rapide et sans risque.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Déterminer une primitive de $f(x) = 3x^2 - \frac{4}{x} + e^{2x}$ sur $]0; +\infty[$, puis de $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

Terme par terme

$3x^2$ a pour primitive x^3 ; $-\frac{4}{x}$ a pour primitive $-4\ln x$ (sur $]0; +\infty[$).

Exponentielle composée

e^{2x} : on pense à $u'e^u$ avec $u = 2x$ et $u' = 2$. Il manque le facteur 2, donc la primitive est $\frac{1}{2}e^{2x}$.

Primitive de f

$$F(x) = x^3 - 4\ln x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

Fonction g

Forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = x^2 + 1$ et $u' = 2x$, et $u > 0$: $G(x) = \ln(x^2 + 1) + C$.

Conclusion. $F(x) = x^3 - 4\ln x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$ et $G(x) = \ln(x^2 + 1) + C$. On peut vérifier les deux en dérivant.

Les erreurs à ne pas faire

Oublier le coefficient d'ajustement : la primitive de e^{2x} est $\frac{1}{2}e^{2x}$, pas e^{2x} .

Croire que la primitive d'un produit est le produit des primitives : c'est faux, il faut reconnaître une forme ou intégrer par parties.

Oublier la constante C , notamment quand une condition initiale doit servir à la déterminer.

Écrire $\ln u$ sans valeur absolue sur un intervalle où u est négative.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déploie ensuite.

1. **Exercice 1**

Déterminer une primitive de $f(x) = 4x^3 - 2x + 5$.

Voir le corrigé

Terme à terme : $F(x) = x^4 - x^2 + 5x + C$.

Vérification : $F'(x) = 4x^3 - 2x + 5$.

2. **Exercice 2**

Déterminer une primitive de $f(x) = \frac{3x^2}{x^3 + 2}$ sur un intervalle où $x^3 + 2 > 0$.

Voir le corrigé

Forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = x^3 + 2$ et $u' = 3x^2$.

$F(x) = \ln(x^3 + 2) + C$.

3. **Exercice 3**

Déterminer la primitive F de $f(x) = 2x + 1$ telle que $F(1) = 5$.

Voir le corrigé

$F(x) = x^2 + x + C$. La condition donne $1 + 1 + C = 5$, donc $C = 3$.

$F(x) = x^2 + x + 3$.

Questions fréquentes

Toute fonction admet-elle une primitive ?

Toute fonction **continue** sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle : c'est un théorème du programme de terminale. En revanche, on ne sait pas toujours les écrire avec les fonctions usuelles : e^{-x^2} en est l'exemple le plus célèbre.

Pourquoi une constante apparaît-elle ?

Parce que la dérivée d'une constante est nulle : si F convient, $F+7$ convient aussi. Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent toujours d'une constante, qu'une condition du type $F(1) = 5$ permet de fixer.