

Comment déterminer une équation cartésienne de plan ?

LA RÉPONSE COURTE

Un plan de **vecteur normal** $\vec{n}(a;b;c)$ a une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$. On trouve d en remplaçant par les coordonnées d'un point du plan.

La méthode en 5 étapes

1. Trouver un vecteur normal

Il est donné, ou bien il s'obtient à partir de trois points : on cherche $\vec{n}$ orthogonal à deux vecteurs du plan, en résolvant $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

2. Écrire l'équation à une constante près

Les coordonnées du vecteur normal sont directement les coefficients : $ax+by+cz+d=0$.

3. Calculer d

On remplace x, y, z par les coordonnées d'un point connu du plan, et on résout en d .

4. Vérifier

On teste l'équation avec un autre point du plan : elle doit être satisfaite.

5. Utiliser l'équation

Un point appartient au plan si ses coordonnées vérifient l'équation. Deux plans sont parallèles si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par $A(1;2;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2;-1;4)$. Le point $B(0;4;3)$ appartient-il à P ?

Forme de l'équation

Le vecteur normal donne les coefficients : $2x-y+4z+d=0$.

Calcul de d

A appartient au plan : $2 \times 1 - 2 + 4 \times 3 + d = 0$, soit $2 - 2 + 12 + d = 0$ et $d = -12$.

Équation

$$2x - y + 4z - 12 = 0.$$

Test de B

$$2 \times 0 - 4 + 4 \times 3 - 12 = -4 + 12 - 12 = -4 \neq 0.$$

Conclusion. Le plan a pour équation $2x - y + 4z - 12 = 0$, et le point B ne lui appartient pas.

Les erreurs à ne pas faire

Confondre vecteur normal (perpendiculaire au plan) et vecteur directeur (contenu dans le plan).

Oublier de calculer d et laisser l'équation incomplète.

Se tromper de signe dans le calcul de d .

Croire qu'une équation de plan décrit une droite : dans l'espace, une seule équation cartésienne définit un plan, une droite demande un système.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déploie ensuite.

1. Exercice 1

Déterminer une équation du plan passant par $C(0;0;5)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1;1;1)$.

Voir le corrigé

$x + y + z + d = 0$, et C donne $5 + d = 0$, soit $d = -5$.

Équation : $x + y + z - 5 = 0$.

2. Exercice 2

Les plans d'équations $2x - y + 3z - 1 = 0$ et $-4x + 2y - 6z + 7 = 0$ sont-ils parallèles ?

Voir le corrigé

Vecteurs normaux : $\vec{n}_1(2;-1;3)$ et $\vec{n}_2(-4;2;-6) = -2\vec{n}_1$.

Ils sont colinéaires : les plans sont **parallèles**. Ils ne sont pas confondus, car $-2 \times (-1) \neq 7$.

3. Exercice 3

La droite de vecteur directeur $\vec{u}(1;2;-1)$ est-elle parallèle au plan d'équation $x + y + 3z - 4 = 0$?

Voir le corrigé

Vecteur normal du plan : $\vec{n}(1;1;3)$. On calcule $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 + 2 - 3 = 0$.

Le vecteur directeur est orthogonal au vecteur normal : la droite est **parallèle au plan** (ou contenue dedans).

Questions fréquentes

Comment trouver un vecteur normal à partir de trois points ?

On forme deux vecteurs du plan, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis on cherche $\vec{n}(a;b;c)$ vérifiant $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Le système a deux équations et trois inconnues : on fixe l'une d'elles, par exemple $c = 1$, et on résout.

Comment calculer la distance d'un point à un plan ?

Par la formule $d(M;P) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. On peut aussi passer par le projeté orthogonal : on écrit la droite passant par M de vecteur directeur $\vec{n}$, on cherche son intersection avec le plan, puis on calcule la distance entre les deux points.