

Comment dériver une fonction composée ?

LA RÉPONSE COURTE

On dérive « de l'extérieur vers l'intérieur » sans oublier de multiplier par la dérivée de l'intérieur : $(e^u)' = u' e^u$, $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, $(u^n)' = n u' u^{n-1}$, $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

La méthode en 5 étapes

1. Identifier la fonction intérieure u

C'est ce qui est « dans » l'exponentielle, le logarithme, la puissance ou la racine. On l'écrit à part, avec sa dérivée u' .

2. Reconnaître la forme extérieure

e^u , $\ln u$, u^n , $\sqrt{u}$ ou $\frac{1}{u}$: chacune a sa formule.

3. Appliquer la formule

Toutes ont la même structure : la dérivée de la fonction extérieure appliquée à u , **multipliée par u'** .

4. Factoriser le résultat

Une dérivée factorisée est indispensable pour l'étape suivante, l'étude du signe. On met e^u en facteur, qui est toujours strictement positif.

5. Vérifier l'ensemble de définition

Pour $\ln u$, il faut $u > 0$; pour $\sqrt{u}$, la dérivée n'existe que si $u > 0$ strictement.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Dériver $f(x) = e^{3x^2-1}$, $g(x) = \ln(x^2+1)$ et $h(x) = (2x-5)^4$.

Fonction f

$u = 3x^2 - 1$, donc $u' = 6x$.

$$f'(x) = u' e^u = 6x e^{3x^2-1}$$

Fonction g

$u = x^2 + 1$, donc $u' = 2x$, et $u > 0$ pour tout réel.

$$g'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

Fonction h

$u = 2x - 5$, $u' = 2$, $n = 4$.

$$h'(x) = 4 \times 2 \times (2x-5)^3 = 8(2x-5)^3$$

Signes

$e^{3x^2-1} > 0$ et $x^2+1 > 0$: le signe de f' et celui de g' sont donc ceux de x .

Conclusion. $f'(x) = 6x e^{3x^2-1}$, $g'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ et $h'(x) = 8(2x-5)^3$.

Les erreurs à ne pas faire

Oublier le facteur u' : $(e^{3x})' = 3e^{3x}$, et non e^{3x} .

Écrire $(\ln u)' = \frac{1}{u'}$, au lieu de $\frac{u'}{u}$.

Dériver l'intérieur et l'extérieur séparément puis les multiplier au hasard : la structure est toujours « dérivée extérieure appliquée à u , fois u' ».

Perdre l'ensemble de définition en route, notamment avec un logarithme.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déploie ensuite.

1. Exercice 1

Dériver $f(x) = e^{-2x+1}$ et $g(x) = \ln(5x-3)$.

Voir le corrigé

$$f'(x) = -2e^{-2x+1}.$$

$$g'(x) = \frac{5}{5x-3}, \text{ sur }]\frac{3}{5}; +\infty[.$$

2. Exercice 2

Dériver $h(x) = xe^{-x}$ et étudier le signe de h' .

Voir le corrigé

Produit : $u = x$, $u' = 1$; $v = e^{-x}$, $v' = -e^{-x}$.

$h'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$. Comme $e^{-x} > 0$, h' est du signe de $1-x$: positive avant 1, négative après. La fonction admet un maximum en $x = 1$.

3. Exercice 3

Dériver $k(x) = \sqrt{x^2+4}$.

Voir le corrigé

$u = x^2+4 > 0$, $u' = 2x$.

$$k'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}, \text{ du signe de } x.$$

Questions fréquentes

Pourquoi multiplier par u' ?

Parce que la variation de la fonction composée cumule deux effets : la vitesse à laquelle u varie, et la vitesse à laquelle la fonction extérieure varie autour de $u(x)$. La formule $(f \circ u)' = u' \times f' \circ u$ traduit exactement cet enchaînement.

Comment repérer une composée dans un exercice ?

Dès qu'une expression autre que x se trouve à l'intérieur d'une fonction : un exposant qui n'est pas x , une parenthèse élevée à une puissance, une racine d'un polynôme. Si l'intérieur est simplement x , la formule de référence suffit.