Comment utiliser un arbre de probabilités ?

LA RÉPONSE COURTE

Sur un arbre pondéré, on **multiplie** les probabilités le long d'un chemin et on **additionne** les chemins qui réalisent l'événement. La somme des branches issues d'un même nœud vaut toujours 1.

La méthode en 5 étapes

1. **Construire l'arbre**

   Premier niveau : les cas de la première étape. Second niveau : les issues sachant la première, dont les branches portent des probabilités **conditionnelles**.

2. **Vérifier les nœuds**

   À chaque nœud, les probabilités des branches issues de ce nœud ont pour somme 1. C'est un contrôle immédiat de l'arbre.

3. **Multiplier le long d'un chemin**

   $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$, où $P_A(B)$ se lit « probabilité de B sachant A ».

4. **Additionner les chemins**

   Pour un événement réalisé par plusieurs chemins, on additionne leurs probabilités : c'est la **formule des probabilités totales**.

5. **Répondre à une probabilité conditionnelle inverse**

   $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$: on calcule d'abord l'intersection par l'arbre, puis $P(B)$ par les probabilités totales.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Une usine a deux machines : A produit $60\ \%$ des pièces avec $3\ \%$ de défauts, B produit $40\ \%$ des pièces avec $5\ \%$ de défauts. On prend une pièce au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ? Sachant qu'elle l'est, quelle est la probabilité qu'elle vienne de A ?

L'arbre

Premier niveau : $P(A)=0{,}6$ et $P(B)=0{,}4$. Second niveau : $P_A(D)=0{,}03$ et $P_B(D)=0{,}05$, où D est « la pièce est défectueuse ».

Les chemins

$P(A\cap D)=0{,}6\times 0{,}03=0{,}018$ et $P(B\cap D)=0{,}4\times 0{,}05=0{,}02$.

Probabilités totales

$P(D) = 0{,}018 + 0{,}02 = 0{,}038$, soit $3{,}8\ \%$ de pièces défectueuses.

Conditionnelle inverse

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}018}{0{,}038} \approx 0{,}474.$$

Conclusion. La probabilité qu'une pièce soit défectueuse vaut $0{,}038$, et une pièce défectueuse a environ $47{,}4\ \%$ de chances de venir de la machine A.

Les erreurs à ne pas faire

Additionner le long d'un chemin au lieu de multiplier.

Confondre $P_A(D)$ et $P_D(A)$: ces deux probabilités conditionnelles sont très différentes, ici $0{,}03$ contre $0{,}474$.

Oublier un chemin dans la formule des probabilités totales.

Écrire des probabilités conditionnelles sur les branches du premier niveau, où elles n'ont pas lieu d'être.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. **Exercice 1**

   Une urne contient 3 boules rouges et 2 noires. On tire deux boules **sans remise**. Quelle est la probabilité d'obtenir deux rouges ?

   Voir le corrigé

   Premier tirage : $\frac{3}{5}$. Sachant la première rouge, il reste 2 rouges sur 4 boules : $\frac{2}{4}$.
   $P = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10} = 0{,}3$.

2. **Exercice 2**

   $P(A) = 0{,}3$, $P_A(B) = 0{,}8$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}5$. Calculer $P(B)$.

   Voir le corrigé

   $P(A \cap B) = 0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}24$ et $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}7 \times 0{,}5 = 0{,}35$.
   $P(B) = 0{,}24 + 0{,}35 = 0{,}59$.

3. **Exercice 3**

   Avec les données précédentes, calculer $P_B(A)$.

   Voir le corrigé

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}24}{0{,}59}\approx 0{,}407\,.$$

Sachant que B est réalisé, la probabilité de A vaut environ $0{,}41$, contre $0{,}3$ sans information : l'information a modifié la probabilité.

Questions fréquentes

Quand deux événements sont-ils indépendants ?

Quand $P_A(B)=P(B)$, autrement dit quand savoir que A s'est produit ne change rien à la probabilité de B. Cela équivaut à $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$. Sur un arbre, cela se voit : les branches du second niveau portent les mêmes probabilités quelle que soit la branche du premier.

Avec ou sans remise, qu'est-ce qui change ?

Avec remise, les tirages sont indépendants et les probabilités du second niveau sont identiques à celles du premier. Sans remise, le contenu change après le premier tirage : les probabilités du second niveau sont conditionnelles et diffèrent selon la branche.