

Comment utiliser un arbre de probabilités ?

LA RÉPONSE COURTE

Sur un arbre pondéré, on **multiplie** les probabilités le long d'un chemin et on **additionne** les chemins qui réalisent l'événement. La somme des branches issues d'un même nœud vaut toujours 1.

La méthode en 5 étapes

1. Construire l'arbre

Premier niveau : les cas de la première étape. Second niveau : les issues sachant la première, dont les branches portent des probabilités **conditionnelles**.

2. Vérifier les nœuds

À chaque nœud, les probabilités des branches issues de ce nœud ont pour somme 1. C'est un contrôle immédiat de l'arbre.

3. Multiplier le long d'un chemin

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, où $P_A(B)$ se lit « probabilité de B sachant A ».

4. Additionner les chemins

Pour un événement réalisé par plusieurs chemins, on additionne leurs probabilités : c'est la **formule des probabilités totales**.

5. Répondre à une probabilité conditionnelle inverse

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$: on calcule d'abord l'intersection par l'arbre, puis $P(B)$ par les probabilités totales.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Une usine a deux machines : A produit 60 % des pièces avec 3 % de défauts, B produit 40 % des pièces avec 5 % de défauts. On prend une pièce au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ? Sachant qu'elle l'est, quelle est la probabilité qu'elle vienne de A ?

L'arbre

Premier niveau : $P(A) = 0,6$ et $P(B) = 0,4$. Second niveau : $P_A(D) = 0,03$ et $P_B(D) = 0,05$, où D est « la pièce est défectueuse ».

Les chemins

$P(A \cap D) = 0,6 \times 0,03 = 0,018$ et $P(B \cap D) = 0,4 \times 0,05 = 0,02$.

Probabilités totales

$P(D) = 0,018 + 0,02 = 0,038$, soit 3,8 % de pièces défectueuses.

Conditionnelle inverse

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0,018}{0,038} \approx 0,474.$$

Conclusion. La probabilité qu'une pièce soit défectueuse vaut 0,038, et une pièce défectueuse a environ 47,4 % de chances de venir de la machine **A**.

Les erreurs à ne pas faire

Additionner le long d'un chemin au lieu de multiplier.

Confondre $P_A(D)$ et $P_D(A)$: ces deux probabilités conditionnelles sont très différentes, ici 0,03 contre 0,474.

Oublier un chemin dans la formule des probabilités totales.

Écrire des probabilités conditionnelles sur les branches du premier niveau, où elles n'ont pas lieu d'être.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. Exercice 1

Une urne contient 3 boules rouges et 2 noires. On tire deux boules **sans remise**. Quelle est la probabilité d'obtenir deux rouges ?

Voir le corrigé

Premier tirage : $\frac{3}{5}$. Sachant la première rouge, il reste 2 rouges sur 4 boules : $\frac{2}{4}$.

$$P = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10} = 0,3.$$

2. Exercice 2

$P(A) = 0,3$, $P_A(B) = 0,8$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,5$. Calculer $P(B)$.

Voir le corrigé

$$P(A \cap B) = 0,3 \times 0,8 = 0,24 \text{ et } P(\bar{A} \cap B) = 0,7 \times 0,5 = 0,35.$$

$$P(B) = 0,24 + 0,35 = 0,59.$$

3. Exercice 3

Avec les données précédentes, calculer $P_B(A)$.

Voir le corrigé

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,24}{0,59} \approx 0,407.$$

Sachant que B est réalisé, la probabilité de A vaut environ 0,41, contre 0,3 sans information : l'information a modifié la probabilité.

Questions fréquentes

Quand deux événements sont-ils indépendants ?

Quand $P_A(B) = P(B)$, autrement dit quand savoir que A s'est produit ne change rien à la probabilité de B . Cela équivaut à $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Sur un arbre, cela se voit : les branches du second niveau portent les mêmes probabilités quelle que soit la branche du premier.

Avec ou sans remise, qu'est-ce qui change ?

Avec remise, les tirages sont indépendants et les probabilités du second niveau sont identiques à celles du premier. Sans remise, le contenu change après le premier tirage : les probabilités du second niveau sont conditionnelles et diffèrent selon la branche.