Comment utiliser le théorème des valeurs intermédiaires ?

LA RÉPONSE COURTE

Si f est **continue et strictement monotone** sur $[a;b]$ et si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x)=k$ admet une **unique** solution dans $[a;b]$. On la localise ensuite par balayage.

La méthode en 5 étapes

1. **Vérifier la continuité**

   Les fonctions usuelles (polynômes, exponentielle, logarithme, quotients hors valeurs interdites) sont continues sur leur ensemble de définition. Une fonction dérivable est continue.

2. **Établir la stricte monotonie**

   C'est le rôle de la dérivée : si f' est strictement positive sur l'intervalle, f y est strictement croissante. Cette hypothèse est ce qui donne l'**unicité**.

3. **Calculer les valeurs aux bornes**

   On calcule $f(a)$ et $f(b)$, ou leurs limites si les bornes sont infinies, et on vérifie que k est entre les deux.

4. **Rédiger l'application du théorème**

   « f est continue et strictement croissante sur $[a;b]$, et $k\in[f(a);f(b)]$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution α dans $[a;b]$. »

5. **Encadrer la solution**

   Avec la calculatrice, on teste des valeurs jusqu'à obtenir la précision demandée : si $f(1{,}4)<k<f(1{,}5)$, alors $1{,}4<\alpha<1{,}5$.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Soit $f(x)=x^3+x-3$. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $[1;2]$, puis en donner un encadrement au dixième.

Continuité

f est une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[1;2]$.

Monotonie

$f'(x)=3x^2+1>0$ pour tout réel : f est strictement croissante sur $[1;2]$.

Valeurs aux bornes

$f(1)=1+1-3=-1$ et $f(2)=8+2-3=7$. Or 0 est compris entre -1 et 7.

Application du théorème

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $[1;2]$.

Balayage

$f(1{,}2)=1{,}728+1{,}2-3=-0{,}072<0$ et $f(1{,}3)=2{,}197+1{,}3-3=0{,}497>0$.

Conclusion. L'équation admet une unique solution α, avec $1{,}2<\alpha<1{,}3$.

Les erreurs à ne pas faire

Oublier de justifier la stricte monotonie : sans elle, le théorème donne l'existence mais **pas l'unicité**.

Ne pas vérifier que k est bien encadré par $f(a)$ et $f(b)$.

Donner une valeur approchée de α sans encadrement, alors que la question demande une précision.

Appliquer le théorème sur un intervalle où la fonction n'est pas continue, par exemple de part et d'autre d'une valeur interdite.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. **Exercice 1**

   Montrer que $x^3=5$ a une unique solution réelle.

   Voir le corrigé

   $f(x)=x^3$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (car $f'(x)=3x^2\geq 0$, nulle seulement en 0), avec des limites $-\infty$ et $+\infty$.

   5 appartient à $\mathbb{R}$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet une unique solution, $\alpha=\sqrt[3]{5}\approx 1{,}71$.

2. **Exercice 2**

   Soit $f(x)=e^x-3$. Montrer que $f(x)=0$ a une unique solution dans $[1;2]$.

   Voir le corrigé

   f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $f'(x)=e^x>0$.

   $f(1)=e-3\approx -0{,}28<0$ et $f(2)=e^2-3\approx 4{,}39>0$: il existe une unique solution dans $[1;2]$, qui vaut $\ln 3\approx 1{,}10$.

3. **Exercice 3**

Soit f continue sur $[0;4]$ avec $f(0)=-2$ et $f(4)=6$, sans hypothèse de monotonie. Que peut-on affirmer ?

Voir le corrigé

Le théorème des valeurs intermédiaires garantit qu'il existe **au moins** une solution à $f(x)=0$ dans $[0;4]$.

Sans stricte monotonie, on ne peut **pas** affirmer qu'elle est unique : la courbe pourrait traverser l'axe plusieurs fois.

Questions fréquentes

Quelle différence entre le TVI et sa version stricte ?

La version de base, avec la seule continuité, donne l'**existence** d'au moins une solution. En ajoutant la stricte monotonie, on obtient l'**unicité**. C'est cette seconde version, parfois appelée corollaire du TVI ou théorème de la bijection, qu'on utilise presque toujours.

Comment encadrer la solution avec la calculatrice ?

Par balayage : on affiche un tableau de valeurs avec un pas de $0{,}1$, on repère le changement de signe, puis on recommence avec un pas de $0{,}01$ dans cet intervalle. Chaque passage gagne une décimale, jusqu'à la précision demandée.