

Comment utiliser le théorème des valeurs intermédiaires ?

LA RÉPONSE COURTE

Si f est **continue et strictement monotone** sur $[a;b]$ et si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution dans $[a;b]$. On la localise ensuite par balayage.

La méthode en 5 étapes

1. Vérifier la continuité

Les fonctions usuelles (polynômes, exponentielle, logarithme, quotients hors valeurs interdites) sont continues sur leur ensemble de définition. Une fonction dérivable est continue.

2. Établir la stricte monotonie

C'est le rôle de la dérivée : si f' est strictement positive sur l'intervalle, f y est strictement croissante. Cette hypothèse est ce qui donne l'**unicité**.

3. Calculer les valeurs aux bornes

On calcule $f(a)$ et $f(b)$, ou leurs limites si les bornes sont infinies, et on vérifie que k est entre les deux.

4. Rédiger l'application du théorème

« f est continue et strictement croissante sur $[a;b]$, et $k \in [f(a);f(b)]$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution α dans $[a;b]$. »

5. Encadrer la solution

Avec la calculatrice, on teste des valeurs jusqu'à obtenir la précision demandée : si $f(1,4) < k < f(1,5)$, alors $1,4 < \alpha < 1,5$.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Soit $f(x) = x^3 + x - 3$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1;2]$, puis en donner un encadrement au dixième.

Continuité

f est une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[1;2]$.

Monotonie

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ pour tout réel : f est strictement croissante sur $[1;2]$.

Valeurs aux bornes

$f(1) = 1 + 1 - 3 = -1$ et $f(2) = 8 + 2 - 3 = 7$. Or 0 est compris entre -1 et 7 .

Application du théorème

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1;2]$.

Balayage

$f(1,2) = 1,728 + 1,2 - 3 = -0,072 < 0$ et $f(1,3) = 2,197 + 1,3 - 3 = 0,497 > 0$.

Conclusion. L'équation admet une unique solution α , avec $1,2 < \alpha < 1,3$.

Les erreurs à ne pas faire

Oublier de justifier la stricte monotonie : sans elle, le théorème donne l'existence mais **pas l'unicité**.

Ne pas vérifier que k est bien encadré par $f(a)$ et $f(b)$.

Donner une valeur approchée de α sans encadrement, alors que la question demande une précision.

Appliquer le théorème sur un intervalle où la fonction n'est pas continue, par exemple de part et d'autre d'une valeur interdite.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déploie ensuite.

1. Exercice 1

Montrer que $x^3 = 5$ a une unique solution réelle.

Voir le corrigé

$f(x) = x^3$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (car $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, nulle seulement en 0), avec des limites $-\infty$ et $+\infty$.

5 appartient à $\mathbb{R}$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet une unique solution, $\alpha = \sqrt[3]{5} \approx 1,71$.

2. Exercice 2

Soit $f(x) = e^x - 3$. Montrer que $f(x) = 0$ a une unique solution dans $[1;2]$.

Voir le corrigé

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $f'(x) = e^x > 0$.

$f(1) = e - 3 \approx -0,28 < 0$ et $f(2) = e^2 - 3 \approx 4,39 > 0$: il existe une unique solution dans $[1;2]$, qui vaut $\ln 3 \approx 1,10$.

3. Exercice 3

Soit f continue sur $[0;4]$ avec $f(0) = -2$ et $f(4) = 6$, sans hypothèse de monotonie. Que peut-on affirmer ?

Voir le corrigé

Le théorème des valeurs intermédiaires garantit qu'il existe **au moins** une solution à $f(x) = 0$ dans $[0;4]$.

Sans stricte monotonie, on ne peut **pas** affirmer qu'elle est unique : la courbe pourrait traverser l'axe plusieurs fois.

Questions fréquentes

Quelle différence entre le TVI et sa version stricte ?

La version de base, avec la seule continuité, donne l'**existence** d'au moins une solution. En ajoutant la stricte monotonie, on obtient l'**unicité**. C'est cette seconde version, parfois appelée corollaire du TVI ou théorème de la bijection, qu'on utilise presque toujours.

Comment encadrer la solution avec la calculatrice ?

Par balayage : on affiche un tableau de valeurs avec un pas de $0,1$, on repère le changement de signe, puis on recommence avec un pas de $0,01$ dans cet intervalle. Chaque passage gagne une décimale, jusqu'à la précision demandée.