

Comment résoudre une équation produit nul ?

LA RÉPONSE COURTE

Un **produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul**. On ramène donc l'équation à la forme « produit = 0 » en factorisant, puis on résout chaque facteur séparément.

La méthode en 5 étapes

1. Tout ramener à zéro

Si l'équation n'est pas déjà de la forme « quelque chose = 0 », on fait passer tous les termes d'un même côté.

2. Factoriser

Facteur commun ou identité remarquable : l'objectif est d'obtenir un produit de facteurs.

3. Appliquer la règle du produit nul

$(A) \times (B) = 0$ équivaut à $A = 0$ **ou** $B = 0$. On écrit ce « ou », qui fait partie de la rédaction.

4. Résoudre chaque équation

Chaque facteur donne une équation du premier degré, qu'on résout comme d'habitude.

5. Conclure et vérifier

On énonce l'ensemble des solutions, puis on vérifie chacune dans l'équation de départ.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Résoudre $(2x-6)(x+4) = 0$, puis $x^2 - 5x = 0$.

Première équation

Le produit est déjà factorisé et égal à zéro : $2x-6 = 0$ ou $x+4 = 0$.

Résolution

$2x = 6$ donne $x = 3$; $x = -4$ pour le second facteur.

Deuxième équation

On factorise : $x^2 - 5x = x(x-5)$, donc $x(x-5) = 0$.

Résolution

$x = 0$ ou $x-5 = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 5$.

Conclusion. La première équation a pour solutions 3 et -4 ; la seconde a pour solutions 0 et 5.

Les erreurs à ne pas faire

Diviser par x dans $x^2 = 5x$: on perd la solution $x = 0$. Il faut factoriser, jamais diviser par une expression contenant l'inconnue.

Développer une équation déjà factorisée : c'est faire le chemin à l'envers.

Écrire « et » à la place de « ou » : les solutions ne doivent pas annuler les deux facteurs en même temps.

Croire que $(A)(B) = 12$ implique $A = 12$ ou $B = 12$: la règle ne fonctionne qu'avec **zéro**.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. Exercice 1

Résoudre $(x-7)(3x+1) = 0$.

Voir le corrigé

$x-7 = 0$ ou $3x+1 = 0$.

Donc $x = 7$ ou $x = -\frac{1}{3}$.

2. Exercice 2

Résoudre $x^2 - 49 = 0$.

Voir le corrigé

On factorise avec l'identité $a^2 - b^2 : (x-7)(x+7) = 0$.

Donc $x = 7$ ou $x = -7$.

3. Exercice 3

Résoudre $(3x-2)^2 - (x+5)^2 = 0$.

Voir le corrigé

Différence de carrés : $[(3x-2)-(x+5)][(3x-2)+(x+5)] = 0$, soit $(2x-7)(4x+3) = 0$.

$2x-7 = 0$ donne $x = \frac{7}{2}$; $4x+3 = 0$ donne $x = -\frac{3}{4}$.

Questions fréquentes

Pourquoi la règle du produit nul fonctionne-t-elle ?

Parce que multiplier deux nombres non nuls donne toujours un résultat non nul. Si le produit vaut 0, c'est donc forcément qu'au moins un facteur vaut 0. Cette propriété est propre à zéro : aucun autre nombre ne se comporte ainsi.

Combien de solutions peut-on obtenir ?

Autant que de facteurs, au maximum. Deux facteurs donnent au plus deux solutions, parfois une seule si les deux facteurs s'annulent pour la même valeur, comme dans $(x-3)^2 = 0$ qui n'a que $x = 3$ pour solution.