Comment résoudre une équation avec une exponentielle ?

LA RÉPONSE COURTE

On utilise que l'exponentielle est **strictement croissante et strictement positive** : $e^A = e^B$ équivaut à $A = B$, et $e^A < e^B$ équivaut à $A < B$. Une équation $e^x = k$ n'a de solution que si $k > 0$.

La méthode en 5 étapes

1. **Regrouper les exponentielles**

   Avec les règles de calcul : $e^a \times e^b = e^{a+b}$, $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$, $(e^a)^n = e^{na}$.

2. **Se ramener à une égalité d'exponentielles**

   La forme visée est $e^A = e^B$, qui donne directement $A = B$.

3. **Factoriser si c'est une équation produit**

   e^x ne s'annule jamais : dans $xe^x = 0$, seul $x = 0$ convient. C'est un argument à écrire.

4. **Penser au changement de variable**

   Si l'équation contient e^{2x} et e^x, on pose $X = e^x$: on obtient un trinôme, qu'on résout, puis on revient à x en écartant les valeurs négatives ou nulles de X.

5. **Attention au sens dans une inéquation**

   L'exponentielle est croissante : elle conserve le sens de l'inégalité. Mais multiplier par un nombre négatif l'inverse comme d'habitude.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Résoudre $e^{2x-1} = e^{x+3}$, puis $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$.

Première équation

Les deux membres sont des exponentielles : l'égalité équivaut à $2x - 1 = x + 3$.

Résolution

$x = 4$.

Changement de variable

On pose $X = e^x$, avec $X > 0$. Comme $e^{2x} = (e^x)^2 = X^2$, l'équation devient $X^2 - 3X + 2 = 0$.

Retour à x

$\Delta = 1$, racines $X = 1$ et $X = 2$, toutes deux strictement positives. Donc $e^x = 1$ soit $x = 0$

, ou $e^x = 2$ soit $x = \ln 2$.

Conclusion. La première équation a pour solution $x = 4$; la seconde a pour solutions $x = 0$ et $x = \ln 2 \approx 0{,}69$.

Les erreurs à ne pas faire

Écrire $e^{a+b} = e^a + e^b$: l'exponentielle transforme les sommes en **produits**, pas l'inverse.

Chercher les solutions de $e^x = -3$: l'exponentielle est toujours strictement positive, il n'y en a aucune.

Oublier la condition $X > 0$ après un changement de variable, et garder une racine négative.

Simplifier par e^x sans le dire : c'est légitime puisque $e^x \neq 0$, mais il faut le justifier.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. **Exercice 1**

   Résoudre $e^{3x} = e^{x+8}$.

   Voir le corrigé

   $3x = x + 8$, donc $2x = 8$ et $x = 4$.

2. **Exercice 2**

   Résoudre $(x-2)e^x = 0$.

   Voir le corrigé

   Un produit est nul si l'un des facteurs l'est. Or $e^x > 0$ pour tout réel x : ce facteur ne s'annule jamais.

   Donc $x - 2 = 0$ et $S = \{2\}$.

3. **Exercice 3**

   Résoudre l'inéquation $e^{x-1} \geq 1$.

   Voir le corrigé

   On écrit $1 = e^0$: l'inéquation devient $e^{x-1} \geq e^0$.

   L'exponentielle étant strictement croissante, cela équivaut à $x - 1 \geq 0$, soit $S = [1; +\infty[$.

Questions fréquentes

Pourquoi l'exponentielle ne s'annule-t-elle jamais ?

Parce que $e^{x} \times e^{-x} = e^{0} = 1$: si e^{x} valait 0, ce produit serait nul. La fonction exponentielle est donc strictement positive sur $\mathbb{R}$, ce qui sert en permanence pour les signes et les factorisations.

Quel est le lien avec le logarithme népérien ?

$\ln$ est la fonction réciproque de l'exponentielle : $e^{x} = k$ équivaut à $x = \ln k$, pour $k > 0$. C'est l'outil qui permet de résoudre les équations où l'inconnue est en exposant, étudié en terminale.