

Comment résoudre une équation avec un logarithme ?

LA RÉPONSE COURTE

On détermine d'abord l'**ensemble de définition** (tout ce qui est dans un $\ln$ doit être strictement positif), on regroupe les logarithmes avec les règles de calcul, puis on utilise que $\ln A = \ln B$ équivaut à $A = B$.

La méthode en 5 étapes

1. Poser les conditions d'existence

Chaque expression sous un $\ln$ doit être strictement positive. On résout ces inéquations **avant** tout, et on garde l'ensemble obtenu.

2. Regrouper les logarithmes

$\ln a + \ln b = \ln(ab)$; $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$; $n \ln a = \ln(a^n)$. L'objectif est d'obtenir un seul $\ln$ de chaque côté.

3. Supprimer les logarithmes

$\ln A = \ln B$ équivaut à $A = B$, car $\ln$ est strictement croissante donc injective. Pour $\ln A = k$, on écrit $A = e^k$.

4. Résoudre l'équation obtenue

C'est en général du premier ou du second degré.

5. Confronter à l'ensemble de définition

On garde uniquement les solutions qui y appartiennent. Cette étape élimine régulièrement une des deux racines.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Résoudre $\ln(x) + \ln(x-3) = \ln(10)$.

Conditions d'existence

Il faut $x > 0$ et $x-3 > 0$, donc $x > 3$. On résout sur $]3; +\infty[$.

Regroupement

$$\ln(x(x-3)) = \ln(10).$$

Suppression des ln

$$x(x-3) = 10, \text{ soit } x^2 - 3x - 10 = 0.$$

Résolution

$\Delta = 9 + 40 = 49$, racines $x = 5$ et $x = -2$.

Tri

-2 n'appartient pas à $]3; +\infty[$: on l'écarte. Seul 5 convient, et $\ln 5 + \ln 2 = \ln 10$ le confirme.

Conclusion. $S = \{5\}$.

Les erreurs à ne pas faire

Oublier les conditions d'existence et conserver une solution interdite.

Écrire $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$: le logarithme transforme les **produits** en sommes, pas les sommes en sommes.

Écrire $\frac{\ln a}{\ln b} = \ln \frac{a}{b}$: c'est faux, la bonne formule est $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$.

Chercher les solutions de $\ln x = -3$ en croyant qu'il n'y en a pas : il y en a une, $x = e^{-3}$, car le logarithme prend toutes les valeurs réelles.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. Exercice 1

Résoudre $\ln(2x-1) = 3$.

Voir le corrigé

Condition : $x > \frac{1}{2}$. On écrit $2x-1 = e^3$, donc $x = \frac{e^3+1}{2} \approx 10,54$.

Cette valeur respecte la condition : $S = \left\{ \frac{e^3+1}{2} \right\}$.

2. Exercice 2

Résoudre $\ln(x+4) = \ln(2x-1)$.

Voir le corrigé

Conditions : $x > -4$ et $x > \frac{1}{2}$, donc $x > \frac{1}{2}$.

$x+4 = 2x-1$ donne $x = 5$, qui convient. $S = \{5\}$.

3. Exercice 3

Résoudre l'inéquation $\ln(x) \leq 2$.

Voir le corrigé

Condition : $x > 0$. Comme $2 = \ln(e^2)$, l'inéquation s'écrit $\ln x \leq \ln(e^2)$.

Le logarithme est strictement croissant : $x \leq e^2$. En tenant compte de la condition, $S =]0; e^2]$.

Questions fréquentes

Quel est le lien entre ln et exponentielle ?

Ce sont deux fonctions réciproques : $\ln(e^x) = x$ pour tout réel, et $e^{\ln x} = x$ pour $x > 0$. Leurs courbes sont symétriques par rapport à la droite $y = x$, et toute équation de l'une se traduit dans l'autre.

Pourquoi les conditions d'existence sont-elles si importantes ?

Parce que les transformations algébriques peuvent élargir le domaine : $\ln x + \ln(x-3)$ n'existe que pour $x > 3$, alors que $\ln(x(x-3))$ existe aussi pour $x < 0$. Résoudre la seconde forme sans revenir aux conditions initiales fait apparaître une fausse solution.