

Comment résoudre une équation avec des fractions ?

LA RÉPONSE COURTE

On commence par chercher les **valeurs interdites** (celles qui annulent un dénominateur), puis on se ramène à une équation sans fraction, soit en multipliant par le dénominateur commun, soit par un produit en croix. On vérifie enfin que les solutions sont autorisées.

La méthode en 5 étapes

1. Déterminer les valeurs interdites

On résout « chaque dénominateur = 0 ». Ces valeurs sont exclues de l'ensemble de résolution dès le départ, et elles ne pourront jamais être solutions.

2. Se ramener à une forme sans fraction

Égalité de deux quotients : produit en croix. Sinon, on multiplie les deux membres par le dénominateur commun.

3. Résoudre l'équation obtenue

C'est en général une équation du premier degré, ou une équation produit après factorisation.

4. Éliminer les solutions interdites

Si une solution trouvée figure parmi les valeurs interdites, on la rejette.

5. Vérifier

On remplace dans l'équation initiale pour contrôler l'égalité.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Résoudre $\frac{2x+1}{x-3} = 5$.

Valeur interdite

$x-3=0$ pour $x=3$: la valeur 3 est interdite, on résout sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Suppression du quotient

On multiplie les deux membres par $x-3$: $2x+1=5(x-3)$.

Résolution

$2x+1=5x-15$, donc $-3x=-16$ et $x=\frac{16}{3}$.

Contrôle

$$\frac{16}{3} \neq 3 : \text{la solution est autorisée. Vérification : } \frac{2 \times \frac{16}{3} + 1}{\frac{16}{3} - 3} = \frac{\frac{35}{3}}{\frac{7}{3}} = 5.$$

Conclusion. $S = \left\{ \frac{16}{3} \right\}.$

Les erreurs à ne pas faire

Oublier de chercher les valeurs interdites, et garder une solution qui annule un dénominateur.

Multiplier un seul membre par le dénominateur.

Simplifier une fraction en barrant un terme d'une somme : dans $\frac{x+2}{x}$, on ne peut pas barrer les x .

Appliquer le produit en croix à une expression qui n'est pas une égalité de deux quotients.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. Exercice 1

Résoudre $\frac{3}{x} = \frac{5}{x+4}.$

Voir le corrigé

Valeurs interdites : 0 et -4 . Produit en croix : $3(x+4) = 5x$, soit $3x+12 = 5x$ et $x = 6$.
6 n'est pas interdit : $S = \{6\}.$

2. Exercice 2

Résoudre $\frac{x}{2} + \frac{x-1}{3} = 4.$

Voir le corrigé

Pas de valeur interdite. On multiplie tout par 6 : $3x+2(x-1) = 24$, soit $5x-2 = 24$ et $x = \frac{26}{5}.$
 $S = \left\{ \frac{26}{5} \right\}$, soit 5,2.

3. Exercice 3

Résoudre $\frac{x^2-9}{x+3} = 0.$

Voir le corrigé

Valeur interdite : -3 . Un quotient est nul quand son numérateur l'est : $x^2-9 = 0$, donc $x = 3$ ou $x = -3$.

La valeur -3 est interdite, on la rejette : $S = \{3\}.$

Questions fréquentes

Pourquoi certaines valeurs sont-elles interdites ?

Parce que la division par zéro n'a pas de sens. Une expression comme $\frac{2x+1}{x-3}$ n'existe tout simplement pas pour $x = 3$: cette valeur ne peut donc pas être solution, même si le calcul semble la produire après multiplication.

Quand un quotient est-il nul ?

Quand son **numérateur** est nul et que son dénominateur ne l'est pas. On résout donc « numérateur = 0 », puis on écarte les valeurs interdites. C'est la même logique que la règle du produit nul, transposée aux quotients.