Comment rendre une fraction irréductible ?

LA RÉPONSE COURTE

On calcule le **PGCD du numérateur et du dénominateur**, puis on divise les deux par ce nombre. Une seule division suffit, et le résultat est irréductible : c'est ce qui distingue cette méthode des simplifications successives du collège.

La méthode en 4 étapes

1. **Calculer le PGCD**

   Par l'algorithme d'Euclide sur le numérateur et le dénominateur.

2. **Diviser les deux termes**

   On divise numérateur et dénominateur par le PGCD. La valeur de la fraction ne change pas.

3. **Justifier l'irréductibilité**

   Après division par le PGCD, les deux nombres obtenus sont premiers entre eux : la fraction ne peut plus se simplifier. C'est la justification attendue au brevet.

4. **Vérifier**

   On contrôle que le produit du PGCD par les nouveaux termes redonne bien les nombres de départ.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Rendre irréductible la fraction $\frac{429}{273}$.

PGCD

Par l'algorithme d'Euclide : $429 = 273 \times 1 + 156$; $273 = 156 \times 1 + 117$; $156 = 117 \times 1 + 39$; $117 = 39 \times 3 + 0$. Le PGCD vaut 39.

Division

$429 \div 39 = 11$ et $273 \div 39 = 7$.

Résultat

$\frac{429}{273} = \frac{11}{7}$

Justification

11 et 7 sont premiers entre eux, donc la fraction est irréductible.

Conclusion. $\frac{429}{273} = \frac{11}{7}$, fraction irréductible car 11 et 7 sont premiers entre eux.

Les erreurs à ne pas faire

Diviser par un diviseur commun qui n'est pas le plus grand : la fraction se simplifie, mais elle n'est pas encore irréductible.

Oublier la phrase de justification, qui fait partie de la réponse attendue.

Se tromper de sens dans la division : on divise le numérateur *et* le dénominateur par le PGCD.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. **Exercice 1**

   Rendre irréductible $\frac{84}{36}$.

   Voir le corrigé

   $\mathrm{PGCD}(84;36) = 12$ (algorithme d'Euclide).
   $\frac{84}{36} = \frac{84\div 12}{36\div 12} = \frac{7}{3}$, irréductible car 7 et 3 sont premiers entre eux.

2. **Exercice 2**

   Rendre irréductible $\frac{255}{462}$.

   Voir le corrigé

   $462 = 255\times 1 + 207$; $255 = 207\times 1 + 48$; $207 = 48\times 4 + 15$; $48 = 15\times 3 + 3$; $15 = 3\times 5 + 0$. Le PGCD vaut 3.
   $\frac{255}{462} = \frac{85}{154}$, irréductible.

3. **Exercice 3**

   Un sac contient 315 billes rouges et 210 billes bleues. Quelle proportion irréductible de billes rouges contient-il ?

   Voir le corrigé

   Total : $315 + 210 = 525$ billes. Proportion : $\frac{315}{525}$.
   $525 = 315\times 1 + 210$; $315 = 210\times 1 + 105$; $210 = 105\times 2 + 0$, donc PGCD $= 105$.
   $\frac{315}{525} = \frac{3}{5}$: trois billes sur cinq sont rouges.

Questions fréquentes

Pourquoi le résultat est-il forcément irréductible ?

Parce qu'un diviseur commun restant après la division serait, multiplié par le PGCD, un diviseur

commun encore plus grand des nombres de départ. C'est impossible par définition du PGCD. La division par le PGCD garantit donc le résultat en une seule opération.

Est-ce utile quand les nombres sont petits ?

Pas vraiment : pour $\frac{12}{18}$, la simplification mentale par 6 est plus rapide. L'algorithme d'Euclide devient indispensable quand les nombres sont grands ou qu'aucun critère de divisibilité n'est visible, comme pour $\frac{429}{273}$.