Comment rédiger une démonstration en géométrie ?

LA RÉPONSE COURTE

Une démonstration s'écrit toujours en trois temps : **ce que je sais** (les données de l'énoncé), **ce que j'utilise** (la propriété ou le théorème, cité en entier), **ce que j'en conclus**. Chaque affirmation doit être justifiée.

La méthode en 5 étapes

1. **Lire la question et repérer la conclusion visée**

   On note ce qu'il faut démontrer. Toute la démonstration part de la fin : quel théorème permettrait d'obtenir ce résultat ?

2. **Inventorier les données**

   On relit l'énoncé et le codage de la figure : longueurs, angles droits, parallèles, milieux. Tout ce qui est codé est utilisable, rien d'autre.

3. **Choisir la propriété**

   On cherche le théorème dont les hypothèses correspondent aux données. Angles droits et longueurs : Pythagore. Parallèles et alignements : Thalès. Angle et longueurs : trigonométrie.

4. **Vérifier que les hypothèses sont réunies**

   C'est l'étape qui distingue une démonstration d'une affirmation. Si le théorème demande deux droites parallèles, il faut avoir dit pourquoi elles le sont.

5. **Rédiger les trois temps**

   « On sait que… », « Or, d'après [propriété citée entièrement]… », « Donc… ». Une figure ne démontre jamais rien : elle illustre.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

ABC est un triangle avec $AB = 5$ cm, $AC = 12$ cm et $BC = 13$ cm. Démontrer que ABC est rectangle, puis calculer l'angle $\widehat{B}$ au degré près.

Ce que je sais

Les trois longueurs du triangle sont connues, et le plus grand côté est $[BC]$.

Les deux calculs séparés

D'une part $BC^2 = 13^2 = 169$. D'autre part $AB^2 + AC^2 = 25 + 144 = 169$.

La propriété et la conclusion

Comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

L'angle

Le triangle étant rectangle en A, par rapport à $\widehat{B}$: $[AC]$ est opposé, $[BC]$ est l'hypoténuse. Donc $\sin(\widehat{B}) = \frac{12}{13} \approx 0{,}923$, d'où $\widehat{B} \approx 67[?][?]$.

Conclusion. ABC est rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore, et $\widehat{B} \approx 67[?][?]$. Remarquer que la seconde question n'était possible qu'une fois la première démontrée.

Les erreurs à ne pas faire

Utiliser la figure comme preuve : « on voit que l'angle est droit » ne vaut aucun point.

Citer un théorème sans vérifier ses hypothèses, par exemple appliquer Thalès sans parallèles.

Confondre un théorème et sa réciproque : l'un calcule, l'autre démontre.

Sauter la phrase de conclusion : le correcteur attend une réponse rédigée à la question posée.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. **Exercice 1**

   $ABCD$ est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu. Démontrer que c'est un parallélogramme.

   Voir le corrigé

   On sait que les diagonales de $ABCD$ se coupent en leur milieu.

   Or, si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.

   Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

2. **Exercice 2**

   M appartient à la médiatrice de $[AB]$. Démontrer que $MA = MB$.

   Voir le corrigé

   On sait que M appartient à la médiatrice de $[AB]$.

   Or, si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.

   Donc $MA = MB$.

3. **Exercice 3**

Dans un triangle ABC, I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[AC]$. Démontrer que (IJ) est parallèle à (BC).

Voir le corrigé

On sait que I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$.

Or, dans un triangle, la droite qui joint les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté (théorème des milieux).

Donc (IJ) est parallèle à (BC), et de plus $IJ = \frac{BC}{2}$.

Questions fréquentes

Faut-il apprendre les théorèmes par cœur ?

Il faut connaître leur énoncé complet, avec leurs hypothèses, car c'est cet énoncé qu'on cite dans la démonstration. Un théorème à moitié su conduit à l'utiliser dans une situation où il ne s'applique pas, ce qui invalide toute la démonstration.

Comment savoir par où commencer ?

On part de la conclusion demandée et on remonte : « pour montrer que deux droites sont parallèles, quels théorèmes connais-je ? ». On confronte ensuite leurs hypothèses aux données de l'énoncé. C'est ce va-et-vient, plus que la rédaction, qui constitue le vrai travail.