

Comment rédiger une démonstration en géométrie ?

LA RÉPONSE COURTE

Une démonstration s'écrit toujours en trois temps : **ce que je sais** (les données de l'énoncé), **ce que j'utilise** (la propriété ou le théorème, cité en entier), **ce que j'en conclus**. Chaque affirmation doit être justifiée.

La méthode en 5 étapes

1. Lire la question et repérer la conclusion visée

On note ce qu'il faut démontrer. Toute la démonstration part de la fin : quel théorème permettrait d'obtenir ce résultat ?

2. Inventorier les données

On relit l'énoncé et le codage de la figure : longueurs, angles droits, parallèles, milieux. Tout ce qui est codé est utilisable, rien d'autre.

3. Choisir la propriété

On cherche le théorème dont les hypothèses correspondent aux données. Angles droits et longueurs : Pythagore. Parallèles et alignements : Thalès. Angle et longueurs : trigonométrie.

4. Vérifier que les hypothèses sont réunies

C'est l'étape qui distingue une démonstration d'une affirmation. Si le théorème demande deux droites parallèles, il faut avoir dit pourquoi elles le sont.

5. Rédiger les trois temps

« On sait que... », « Or, d'après [propriété citée entièrement]... », « Donc... ». Une figure ne démontre jamais rien : elle illustre.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

ABC est un triangle avec $AB = 5$ cm, $AC = 12$ cm et $BC = 13$ cm. Démontrer que ABC est rectangle, puis calculer l'angle $\widehat{B}$ au degré près.

Ce que je sais

Les trois longueurs du triangle sont connues, et le plus grand côté est $[BC]$.

Les deux calculs séparés

D'une part $BC^2 = 13^2 = 169$. D'autre part $AB^2 + AC^2 = 25 + 144 = 169$.

La propriété et la conclusion

Comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A .

L'angle

Le triangle étant rectangle en A , par rapport à $\widehat{B}$: $[AC]$ est opposé, $[BC]$ est l'hypoténuse. Donc $\sin(\widehat{B}) = \frac{12}{13} \approx 0,923$, d'où $\widehat{B} \approx 67[?][?]$.

Conclusion. ABC est rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore, et $\widehat{B} \approx 67[?][?]$. Remarquer que la seconde question n'était possible qu'une fois la première démontrée.

Les erreurs à ne pas faire

Utiliser la figure comme preuve : « on voit que l'angle est droit » ne vaut aucun point.

Citer un théorème sans vérifier ses hypothèses, par exemple appliquer Thalès sans parallèles.

Confondre un théorème et sa réciproque : l'un calcule, l'autre démontre.

Sauter la phrase de conclusion : le correcteur attend une réponse rédigée à la question posée.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déploie ensuite.

1. Exercice 1

$ABCD$ est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu. Démontrer que c'est un parallélogramme.

Voir le corrigé

On sait que les diagonales de $ABCD$ se coupent en leur milieu.

Or, si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.

Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

2. Exercice 2

M appartient à la médiatrice de $[AB]$. Démontrer que $MA = MB$.

Voir le corrigé

On sait que M appartient à la médiatrice de $[AB]$.

Or, si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.

Donc $MA = MB$.

3. **Exercice 3**

Dans un triangle ABC , I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[AC]$. Démontrer que (IJ) est parallèle à (BC) .

Voir le corrigé

On sait que I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$.

Or, dans un triangle, la droite qui joint les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté (théorème des milieux).

Donc (IJ) est parallèle à (BC) , et de plus $IJ = \frac{BC}{2}$.

Questions fréquentes

Faut-il apprendre les théorèmes par cœur ?

Il faut connaître leur énoncé complet, avec leurs hypothèses, car c'est cet énoncé qu'on cite dans la démonstration. Un théorème à moitié su conduit à l'utiliser dans une situation où il ne s'applique pas, ce qui invalide toute la démonstration.

Comment savoir par où commencer ?

On part de la conclusion demandée et on remonte : « pour montrer que deux droites sont parallèles, quels théorèmes connais-je ? ». On confronte ensuite leurs hypothèses aux données de l'énoncé. C'est ce va-et-vient, plus que la rédaction, qui constitue le vrai travail.