

Comment montrer que deux vecteurs sont colinéaires ?

LA RÉPONSE COURTE

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$. Ce nombre s'appelle le déterminant ; il sert à prouver un alignement ou un parallélisme.

La méthode en 5 étapes

1. Calculer les coordonnées des deux vecteurs

Par « arrivée moins départ » pour chacun.

2. Calculer le déterminant

On multiplie en croix : $x \times y'$ moins $y \times x'$. On écrit le calcul complet, sans sauter d'étape.

3. Conclure sur la colinéarité

Déterminant nul : les vecteurs sont colinéaires. Non nul : ils ne le sont pas.

4. Traduire selon la question

Alignement de A, B, C : on montre que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Parallélisme de (AB) et (CD) : on montre que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ le sont.

5. Rédiger la conclusion

« Le déterminant est nul, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc les points A, B, C sont alignés. »

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

$A(1;2)$, $B(4;3)$ et $C(10;5)$. Les points sont-ils alignés ?

Les vecteurs

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminant

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 3 \times 3 - 1 \times 9 = 9 - 9 = 0.$$

Colinéarité

Le déterminant est nul, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Conclusion

Ces deux vecteurs partent du même point A : les points A, B et C sont donc alignés. On

remarque d'ailleurs que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$.

Conclusion. Le déterminant est nul : les points A , B et C sont alignés.

Les erreurs à ne pas faire

Calculer $xy' + yx'$ au lieu de $xy' - yx'$: c'est une différence.

Prendre des vecteurs qui ne partent pas du même point pour montrer un alignement : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, pas $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ (qui marchent aussi, mais il faut alors le justifier autrement).

Conclure « les vecteurs sont parallèles » : on dit **colinéaires** pour des vecteurs, parallèles pour des droites.

Oublier la phrase qui relie la colinéarité à la question posée.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déploie ensuite.

1. Exercice 1

$\vec{u}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Voir le corrigé

$$\det = 6 \times 2 - (-4) \times (-3) = 12 - 12 = 0.$$

Oui, ils sont colinéaires : on a d'ailleurs $\vec{u} = -2\vec{v}$.

2. Exercice 2

$A(-1;0)$, $B(2;6)$, $C(3;1)$, $D(5;5)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

Voir le corrigé

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}. \det = 3 \times 4 - 6 \times 2 = 12 - 12 = 0.$$

Les vecteurs sont colinéaires, donc les droites (AB) et (CD) sont **parallèles**.

3. Exercice 3

Déterminer m pour que $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ m \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ soient colinéaires.

Voir le corrigé

$$\det = 4 \times 9 - m \times 6 = 36 - 6m. \text{ Il est nul lorsque } 6m = 36, \text{ soit } m = 6.$$

Pour $m = 6$, les deux vecteurs sont colinéaires.

Questions fréquentes

Que signifie géométriquement la colinéarité ?

Que les deux vecteurs ont la **même direction** : ils sont portés par des droites parallèles, ou par la même droite. L'un est alors un multiple de l'autre, $\vec{v} = k\vec{u}$, et le déterminant nul exprime exactement cela.

Le vecteur nul est-il colinéaire à tout vecteur ?

Oui, par convention : son déterminant avec n'importe quel vecteur est nul. C'est cohérent avec la définition $\vec{0} = 0 \times \vec{u}$. Cela dit, cette situation apparaît rarement en exercice, sauf si deux points de l'énoncé sont confondus.