Comment montrer que deux vecteurs sont colinéaires ?

LA RÉPONSE COURTE

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy'-yx'=0$. Ce nombre s'appelle le déterminant ; il sert à prouver un alignement ou un parallélisme.

La méthode en 5 étapes

1. **Calculer les coordonnées des deux vecteurs**

   Par « arrivée moins départ » pour chacun.

2. **Calculer le déterminant**

   On multiplie en croix : $x\times y'$ moins $y\times x'$. On écrit le calcul complet, sans sauter d'étape.

3. **Conclure sur la colinéarité**

   Déterminant nul : les vecteurs sont colinéaires. Non nul : ils ne le sont pas.

4. **Traduire selon la question**

   Alignement de A, B, C : on montre que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Parallélisme de (AB) et (CD) : on montre que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ le sont.

5. **Rédiger la conclusion**

   « Le déterminant est nul, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc les points A, B, C sont alignés. »

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

$A(1;2)$, $B(4;3)$ et $C(10;5)$. Les points sont-ils alignés ?

Les vecteurs

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$.

Déterminant

$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=3\times3-1\times9=9-9=0$.

Colinéarité

Le déterminant est nul, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Conclusion

Ces deux vecteurs partent du même point A : les points A, B et C sont donc alignés. On

remarque d'ailleurs que $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$.

Conclusion. Le déterminant est nul : les points A, B et C sont alignés.

Les erreurs à ne pas faire

Calculer $xy'+yx'$ au lieu de $xy'-yx'$: c'est une différence.

Prendre des vecteurs qui ne partent pas du même point pour montrer un alignement : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, pas $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ (qui marchent aussi, mais il faut alors le justifier autrement).

Conclure « les vecteurs sont parallèles » : on dit **colinéaires** pour des vecteurs, parallèles pour des droites.

Oublier la phrase qui relie la colinéarité à la question posée.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. **Exercice 1**

   $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

   Voir le corrigé

   $\det = 6\times2-(-4)\times(-3)=12-12=0$.

   Oui, ils sont colinéaires : on a d'ailleurs $\vec{u}=-2\vec{v}$.

2. **Exercice 2**

   $A(-1;0)$, $B(2;6)$, $C(3;1)$, $D(5;5)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

   Voir le corrigé

   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$. $\det = 3\times4-6\times2=12-12=0$.

   Les vecteurs sont colinéaires, donc les droites (AB) et (CD) sont **parallèles**.

3. **Exercice 3**

   Déterminer m pour que $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\m\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$ soient colinéaires.

   Voir le corrigé

   $\det = 4\times9-m\times6=36-6m$. Il est nul lorsque $6m=36$, soit $m=6$.

   Pour $m=6$, les deux vecteurs sont colinéaires.

Questions fréquentes

Que signifie géométriquement la colinéarité ?

Que les deux vecteurs ont la **même direction** : ils sont portés par des droites parallèles, ou par la même droite. L'un est alors un multiple de l'autre, $\vec{v} = k\vec{u}$, et le déterminant nul exprime exactement cela.

Le vecteur nul est-il colinéaire à tout vecteur ?

Oui, par convention : son déterminant avec n'importe quel vecteur est nul. C'est cohérent avec la définition $\vec{0} = 0 \times \vec{u}$. Cela dit, cette situation apparaît rarement en exercice, sauf si deux points de l'énoncé sont confondus.