Comment montrer que deux droites sont perpendiculaires ?

LA RÉPONSE COURTE

Deux droites sont perpendiculaires lorsque leurs vecteurs directeurs sont **orthogonaux**, c'est-à-dire lorsque leur produit scalaire est **nul** : $xx'+yy'=0$.

La méthode en 5 étapes

1. **Trouver un vecteur directeur de chaque droite**

   Deux points de la droite donnent un vecteur directeur. À partir de $y=mx+p$, on peut prendre $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$; à partir de $ax+by+c=0$, on prend $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

2. **Calculer le produit scalaire**

   $xx'+yy'$, avec tout le calcul écrit.

3. **Conclure**

   Produit nul : les vecteurs sont orthogonaux, donc les droites sont perpendiculaires. Produit non nul : elles ne le sont pas.

4. **Utiliser le critère des coefficients directeurs**

   Pour deux droites non verticales, elles sont perpendiculaires si et seulement si $m\times m'=-1$. C'est plus rapide quand les équations réduites sont connues.

5. **Rédiger**

   « $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$, donc (AB) et (CD) sont perpendiculaires. »

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

$A(1;1)$, $B(4;3)$, $C(0;5)$ et $D(2;2)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires ?

Vecteurs directeurs

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$.

Produit scalaire

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=3\times2+2\times(-3)=6-6=0$.

Conclusion

Le produit scalaire est nul : les vecteurs sont orthogonaux.

Contrôle

Coefficients directeurs : $m=\frac{2}{3}$ pour (AB) et $m'=-\frac{3}{2}$ pour (CD). Leur produit vaut -1 : les deux critères concordent.

Conclusion. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$, donc les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Les erreurs à ne pas faire

Chercher un produit scalaire égal à -1 : c'est le produit des *coefficients directeurs* qui vaut -1, pas le produit scalaire, qui doit être nul.

Utiliser le critère $mm'=-1$ avec une droite verticale, qui n'a pas de coefficient directeur.

Confondre orthogonalité (produit scalaire nul) et colinéarité (déterminant nul).

Conclure sans écrire la phrase reliant le calcul à la question.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. **Exercice 1**

   Les droites d'équations $y=2x+1$ et $y=-0{,}5x+4$ sont-elles perpendiculaires ?

   Voir le corrigé

   $m\times m'=2\times(-0{,}5)=-1$.

   Oui, elles sont **perpendiculaires**.

2. **Exercice 2**

   $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?

   Voir le corrigé

   $\vec{u}\cdot\vec{v}=4\times3+(-6)\times2=12-12=0$.

   Oui, ces deux vecteurs sont orthogonaux.

3. **Exercice 3**

   $A(2;1)$, $B(5;7)$ et $C(8;0)$. Le triangle ABC est-il rectangle en B ?

   Voir le corrigé

   $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\-7\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-9+42=33\neq0$: le triangle **n'est pas** rectangle en B.

Questions fréquentes

Pourquoi le produit scalaire s'annule-t-il pour des vecteurs perpendiculaires ?

Parce que $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\theta$ et que $\cos(90[?][?]) = 0$. Dès que l'angle est droit, le produit est nul quelles que soient les longueurs ; réciproquement, un produit nul avec des vecteurs non nuls impose $\cos\theta = 0$.

Comment trouver une droite perpendiculaire à une autre ?

On prend un vecteur orthogonal au vecteur directeur : à partir de $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, le vecteur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ convient toujours. Avec l'équation réduite, le coefficient directeur cherché est $-\frac{1}{m}$.