

Comment montrer que deux droites sont perpendiculaires ?

LA RÉPONSE COURTE

Deux droites sont perpendiculaires lorsque leurs vecteurs directeurs sont **orthogonaux**, c'est-à-dire lorsque leur produit scalaire est **nul** : $xx' + yy' = 0$.

La méthode en 5 étapes

1. Trouver un vecteur directeur de chaque droite

Deux points de la droite donnent un vecteur directeur. À partir de $y = mx + p$, on peut prendre $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$; à partir de $ax + by + c = 0$, on prend $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

2. Calculer le produit scalaire

$xx' + yy'$, avec tout le calcul écrit.

3. Conclure

Produit nul : les vecteurs sont orthogonaux, donc les droites sont perpendiculaires. Produit non nul : elles ne le sont pas.

4. Utiliser le critère des coefficients directeurs

Pour deux droites non verticales, elles sont perpendiculaires si et seulement si $m \times m' = -1$. C'est plus rapide quand les équations réduites sont connues.

5. Rédiger

« $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, donc (AB) et (CD) sont perpendiculaires. »

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

$A(1;1)$, $B(4;3)$, $C(0;5)$ et $D(2;2)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires ?

Vecteurs directeurs

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Produit scalaire

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 3 \times 2 + 2 \times (-3) = 6 - 6 = 0$.

Conclusion

Le produit scalaire est nul : les vecteurs sont orthogonaux.

Contrôle

Coefficients directeurs : $m = \frac{2}{3}$ pour (AB) et $m' = -\frac{3}{2}$ pour (CD) . Leur produit vaut -1 : les deux critères concordent.

Conclusion. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, donc les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Les erreurs à ne pas faire

Chercher un produit scalaire égal à -1 : c'est le produit des *coefficients directeurs* qui vaut -1 , pas le produit scalaire, qui doit être nul.

Utiliser le critère $mm' = -1$ avec une droite verticale, qui n'a pas de coefficient directeur.

Confondre orthogonalité (produit scalaire nul) et colinéarité (déterminant nul).

Conclure sans écrire la phrase reliant le calcul à la question.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déploie ensuite.

1. Exercice 1

Les droites d'équations $y = 2x + 1$ et $y = -0,5x + 4$ sont-elles perpendiculaires ?

Voir le corrigé

$$m \times m' = 2 \times (-0,5) = -1.$$

Oui, elles sont **perpendiculaires**.

2. Exercice 2

$\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?

Voir le corrigé

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 3 + (-6) \times 2 = 12 - 12 = 0.$$

Oui, ces deux vecteurs sont orthogonaux.

3. Exercice 3

$A(2;1)$, $B(5;7)$ et $C(8;0)$. Le triangle ABC est-il rectangle en B ?

Voir le corrigé

$$\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -9 + 42 = 33 \neq 0 : \text{le triangle } \mathbf{n'est pas} \text{ rectangle en } B.$$

Questions fréquentes

Pourquoi le produit scalaire s'annule-t-il pour des vecteurs perpendiculaires ?

Parce que $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$ et que $\cos(90^\circ) = 0$. Dès que l'angle est droit, le produit est nul quelles que soient les longueurs ; réciproquement, un produit nul avec des vecteurs non nuls impose $\cos \theta = 0$.

Comment trouver une droite perpendiculaire à une autre ?

On prend un vecteur orthogonal au vecteur directeur : à partir de $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, le vecteur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ convient toujours. Avec l'équation réduite, le coefficient directeur cherché est $-\frac{1}{m}$.