

Comment montrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique ?

LA RÉPONSE COURTE

On calcule $u_{n+1} - u_n$: si le résultat est une **constante**, la suite est arithmétique de raison r . Sinon on calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$: si c'est une constante, la suite est géométrique de raison q .

La méthode en 5 étapes

1. Exprimer $u(n+1)$

On remplace **chaque** n par $n+1$ dans la formule, avec des parenthèses. C'est l'étape où se glissent la plupart des erreurs.

2. Calculer la différence

$u_{n+1} - u_n$, développé et réduit. Si tous les n disparaissent, la suite est arithmétique et la constante obtenue est la raison.

3. Sinon, calculer le quotient

$\frac{u_{n+1}}{u_n}$, simplifié. Si le résultat ne dépend plus de n , la suite est géométrique de raison ce quotient.

4. Rédiger la conclusion

« Pour tout n , $u_{n+1} - u_n = 3$: la suite est arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = \dots$ »

5. En déduire le terme général

Arithmétique : $u_n = u_0 + nr$. Géométrique : $u_n = u_0 \times q^n$. Si le premier terme est u_1 , les formules deviennent $u_1 + (n-1)r$ et $u_1 \times q^{n-1}$.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Soit (u_n) définie par $u_n = 5n - 3$ et (v_n) définie par $v_n = 4 \times 2^n$. Déterminer la nature de chaque suite.

$u(n+1)$

$$u_{n+1} = 5(n+1) - 3 = 5n + 5 - 3 = 5n + 2.$$

Différence

$$u_{n+1} - u_n = (5n + 2) - (5n - 3) = 5. \text{ La constante ne dépend pas de } n.$$

$v(n+1)$

$$v_{n+1} = 4 \times 2^{n+1} = 4 \times 2^n \times 2.$$

Quotient

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4 \times 2^n \times 2}{4 \times 2^n} = 2, \text{ constante.}$$

Conclusion. (u_n) est arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_0 = -3$; (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = 4$.

Les erreurs à ne pas faire

Remplacer n par $n+1$ sans parenthèses : $5(n+1)-3$ et non $5n+1-3$.

Vérifier sur les trois premiers termes et conclure : ce n'est pas une démonstration, il faut raisonner pour tout n .

Calculer $u_n - u_{n+1}$: la raison serait l'opposée de la bonne.

Calculer un quotient sans s'assurer que u_n ne s'annule jamais.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déploie ensuite.

1. Exercice 1

La suite définie par $u_n = 7 - 2n$ est-elle arithmétique ?

Voir le corrigé

$$u_{n+1} = 7 - 2(n+1) = 5 - 2n, \text{ donc } u_{n+1} - u_n = (5 - 2n) - (7 - 2n) = -2.$$

Oui : elle est arithmétique de raison -2 , donc décroissante, avec $u_0 = 7$.

2. Exercice 2

La suite définie par $u_{n+1} = 3u_n$ et $u_0 = 5$: quelle est sa nature et son terme général ?

Voir le corrigé

Chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par 3 : la suite est **géométrique** de raison 3.

$$u_n = 5 \times 3^n. \text{ Par exemple } u_4 = 5 \times 81 = 405.$$

3. Exercice 3

Un capital de 2 000 € est placé à 3 % par an. Modéliser le capital C_n après n années.

Voir le corrigé

Chaque année, le capital est multiplié par 1,03 : la suite est géométrique de raison 1,03.

$$C_n = 2000 \times 1,03^n. \text{ Après 10 ans : } C_{10} \approx 2\,687,83 \text{ €}.$$

Questions fréquentes

Une suite peut-elle être ni l'une ni l'autre ?

Oui, et c'est le cas le plus fréquent : $u_n = n^2$ n'est ni arithmétique (la différence $2n+1$ dépend de n) ni géométrique. On le montre en exhibant deux différences ou deux quotients distincts, par exemple sur les premiers termes, ce qui suffit pour un contre-exemple.

Comment reconnaître la nature dans un problème concret ?

On repère si l'évolution est **additive** ou **multiplicative**. « On ajoute 50 € chaque mois » : suite arithmétique. « Le capital augmente de 3 % par an » ou « la population diminue de moitié » : suite géométrique, car un pourcentage correspond à une multiplication.