Comment montrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique ?

LA RÉPONSE COURTE

On calcule $u_{n+1}-u_n$: si le résultat est une **constante**, la suite est arithmétique de raison r. Sinon on calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$: si c'est une constante, la suite est géométrique de raison q.

La méthode en 5 étapes

1. **Exprimer u(n+1)**

   On remplace **chaque** n par $n+1$ dans la formule, avec des parenthèses. C'est l'étape où se glissent la plupart des erreurs.

2. **Calculer la différence**

   $u_{n+1}-u_n$, développé et réduit. Si tous les n disparaissent, la suite est arithmétique et la constante obtenue est la raison.

3. **Sinon, calculer le quotient**

   $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, simplifié. Si le résultat ne dépend plus de n, la suite est géométrique de raison ce quotient.

4. **Rédiger la conclusion**

   « Pour tout n, $u_{n+1}-u_n=3$: la suite est arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0=\dots$ »

5. **En déduire le terme général**

   Arithmétique : $u_n=u_0+nr$. Géométrique : $u_n=u_0\times q^n$. Si le premier terme est u_1, les formules deviennent $u_1+(n-1)r$ et $u_1\times q^{n-1}$.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Soit (u_n) définie par $u_n=5n-3$ et (v_n) définie par $v_n=4\times 2^n$. Déterminer la nature de chaque suite.

u(n+1)

$u_{n+1}=5(n+1)-3=5n+5-3=5n+2$.

Différence

$u_{n+1}-u_n=(5n+2)-(5n-3)=5$. La constante ne dépend pas de n.

v(n+1)

$v_{n+1} = 4\times2^{n+1} = 4\times2^n\times2$.

Quotient

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4\times2^n\times2}{4\times2^n} = 2$, constante.

Conclusion. (u_n) est arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_0 = -3$; (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = 4$.

Les erreurs à ne pas faire

Remplacer n par $n+1$ sans parenthèses : $5(n+1)-3$ et non $5n+1-3$.

Vérifier sur les trois premiers termes et conclure : ce n'est pas une démonstration, il faut raisonner pour tout n.

Calculer $u_n - u_{n+1}$: la raison serait l'opposée de la bonne.

Calculer un quotient sans s'assurer que u_n ne s'annule jamais.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. **Exercice 1**

   La suite définie par $u_n = 7-2n$ est-elle arithmétique ?

   Voir le corrigé

   $u_{n+1} = 7-2(n+1) = 5-2n$, donc $u_{n+1}-u_n = (5-2n)-(7-2n) = -2$.
   Oui : elle est arithmétique de raison -2, donc décroissante, avec $u_0 = 7$.

2. **Exercice 2**

   La suite définie par $u_{n+1} = 3u_n$ et $u_0 = 5$: quelle est sa nature et son terme général ?

   Voir le corrigé

   Chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par 3 : la suite est **géométrique** de raison 3.
   $u_n = 5\times3^n$. Par exemple $u_4 = 5\times81 = 405$.

3. **Exercice 3**

   Un capital de $2\,000$ € est placé à $3\ \%$ par an. Modéliser le capital C_n après n années.

   Voir le corrigé

   Chaque année, le capital est multiplié par $1{,}03$: la suite est géométrique de raison $1{,}03$.
   $C_n = 2000\times1{,}03^n$. Après 10 ans : $C_{10} \approx 2\,687{,}83$ €.

Questions fréquentes

Une suite peut-elle être ni l'une ni l'autre ?

Oui, et c'est le cas le plus fréquent : $u_n = n^2$ n'est ni arithmétique (la différence $2n+1$ dépend de n) ni géométrique. On le montre en exhibant deux différences ou deux quotients distincts, par exemple sur les premiers termes, ce qui suffit pour un contre-exemple.

Comment reconnaître la nature dans un problème concret ?

On repère si l'évolution est **additive** ou **multiplicative**. « On ajoute 50 € chaque mois » : suite arithmétique. « Le capital augmente de $3\ \%$ par an » ou « la population diminue de moitié » : suite géométrique, car un pourcentage correspond à une multiplication.