Comment montrer qu'un triangle est rectangle ?

LA RÉPONSE COURTE

On calcule **séparément** le carré du plus grand côté d'un côté, et la somme des carrés des deux autres de l'autre. Si les deux résultats sont **égaux**, le triangle est rectangle ; s'ils diffèrent, il ne l'est pas.

La méthode en 5 étapes

1. **Repérer le plus grand côté**

   C'est le seul candidat possible au rôle d'hypoténuse. L'angle droit, s'il existe, sera au sommet opposé.

2. **Calculer le premier membre**

   On calcule le carré du plus grand côté, par exemple BC^2. On l'écrit sur une ligne à part.

3. **Calculer le second membre**

   Sur une autre ligne, on calcule AB^2+AC^2. Les deux calculs doivent rester **séparés** : on ne sait pas encore s'ils sont égaux.

4. **Comparer**

   Égalité : on conclut par la réciproque du théorème de Pythagore. Inégalité : on conclut par la contraposée, le triangle n'est pas rectangle.

5. **Rédiger la conclusion**

   La phrase attendue nomme le théorème et le sommet : « comme $BC^2=AB^2+AC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A ».

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Un triangle ABC a pour côtés $AB=4{,}5$ cm, $AC=6$ cm et $BC=7{,}5$ cm. Est-il rectangle ?

Plus grand côté

Le plus grand côté est $[BC]$ avec $7{,}5$ cm : si le triangle est rectangle, ce sera en A.

Premier calcul

$$BC^2=7{,}5^2=56{,}25$$

Second calcul

$$AB^2+AC^2=4{,}5^2+6^2=20{,}25+36=56{,}25$$

Comparaison

Les deux résultats sont égaux : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Conclusion. Comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

Les erreurs à ne pas faire

Écrire dès le départ « $BC^2 = AB^2 + AC^2$ » : ce serait supposer ce qu'on cherche à démontrer. Les deux membres se calculent séparément.

Choisir le mauvais côté comme hypoténuse : ce doit être le plus grand.

Conclure « le triangle est rectangle » sans préciser **en quel sommet**.

Se contenter d'une mesure à l'équerre sur la figure : une figure n'est jamais une démonstration.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. **Exercice 1**

   Le triangle RST a pour côtés $RS = 8$ cm, $ST = 15$ cm et $RT = 17$ cm. Est-il rectangle ?

   Voir le corrigé

   Plus grand côté : $[RT]$. D'une part $RT^2 = 17^2 = 289$. D'autre part $RS^2 + ST^2 = 64 + 225 = 289$.
   Les résultats sont égaux, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, RST est rectangle **en** S.

2. **Exercice 2**

   Un triangle a pour côtés 5 cm, 7 cm et 9 cm. Est-il rectangle ?

   Voir le corrigé

   Plus grand côté : 9 cm. D'une part $9^2 = 81$. D'autre part $5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$.
   $81 \neq 74$, donc d'après la contraposée du théorème de Pythagore, ce triangle **n'est pas rectangle**.

3. **Exercice 3**

   Un menuisier vérifie qu'un angle de plan de travail est droit : il mesure 60 cm sur un bord, 80 cm sur l'autre, et trouve 102 cm entre les deux repères. L'angle est-il droit ?

   Voir le corrigé

   D'une part $102^2 = 10\,404$. D'autre part $60^2 + 80^2 = 3\,600 + 6\,400 = 10\,000$.

$10\,404 \neq 10\,000$: l'angle **n'est pas droit**. Il aurait fallu mesurer 100 cm.

Questions fréquentes

Quelle différence entre le théorème et sa réciproque ?

Le théorème part d'un triangle **déjà rectangle** et sert à calculer une longueur. La réciproque part de **trois longueurs connues** et sert à prouver que le triangle est rectangle. On ne les utilise donc jamais dans la même situation.

Comment rédiger correctement cette démonstration ?

En trois temps, toujours les mêmes : « D'une part, $BC^2 = \ldots$ » ; « D'autre part, $AB^2 + AC^2 = \ldots$ » ; « Comme ces deux résultats sont égaux, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle en A. » Cette structure vaut des points au brevet, même si le calcul est simple.