Comment lever une forme indéterminée ?

LA RÉPONSE COURTE

Quatre techniques couvrent presque tous les cas : **factoriser par le terme dominant** pour les polynômes et quotients, **multiplier par la quantité conjuguée** quand il y a des racines, **factoriser** pour une forme $\frac{0}{0}$, et invoquer les **croissances comparées** avec e^x ou $\ln x$.

La méthode en 5 étapes

1. **Nommer la forme indéterminée**

   On écrit explicitement « c'est une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$ » : cela oriente la technique et c'est attendu dans la rédaction.

2. **Polynômes et quotients : terme dominant**

   En $\pm\infty$, un polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré. Pour un quotient, on factorise haut et bas par la plus haute puissance.

3. **Racines carrées : quantité conjuguée**

   Pour $\sqrt{A}-\sqrt{B}$, on multiplie et on divise par $\sqrt{A}+\sqrt{B}$: le numérateur devient $A-B$, sans racine.

4. **Forme 0/0 en un réel : factoriser**

   Le nombre a est racine du numérateur et du dénominateur : on factorise par $(x-a)$ et on simplifie. On peut aussi reconnaître un **taux de variation**, dont la limite est un nombre dérivé.

5. **Exponentielle ou logarithme : croissances comparées**

   $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$: l'exponentielle l'emporte sur toute puissance, qui l'emporte sur le logarithme.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$ et $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$.

Première forme

$\sqrt{x^2+x}\to+\infty$ et $x\to+\infty$: forme $\infty-\infty$.

Quantité conjuguée

$$\sqrt{x^2+x}-x=\frac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}.$$

Factorisation

$$= \frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} \longrightarrow \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Seconde limite

En 3, c'est une forme $\frac{0}{0}$. On factorise : $\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3 \longrightarrow 6$.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$.

Les erreurs à ne pas faire

Conclure que $\infty - \infty = 0$: l'exemple ci-dessus donne $\frac{1}{2}$, une autre expression donnerait $+\infty$.

Simplifier par $(x-a)$ sans avoir vérifié que a annule bien les deux termes.

Oublier que $\sqrt{x^2} = |x|$, ce qui change tout en $-\infty$.

Appliquer les croissances comparées dans le mauvais sens : c'est toujours l'exponentielle qui l'emporte.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. **Exercice 1**

   Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x^2-x+1}{2x^2+3}$.

   Voir le corrigé

   Forme $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise par x^2 : $\frac{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{3}{x^2}}$.

   La limite vaut $\frac{4}{2} = 2$.

2. **Exercice 2**

   Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-x}$.

   Voir le corrigé

   Par croissances comparées, $\frac{e^x}{x^2} \to +\infty$.

   $xe^{-x} = \frac{x}{e^x}$, qui tend vers 0 pour la même raison.

3. **Exercice 3**

   Calculer $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(2+h)^2-4}{h}$.

Voir le corrigé

Forme $\frac{0}{0}$. On développe : $\frac{4+4h+h^2-4}{h} = \frac{h(4+h)}{h} = 4+h \longrightarrow 4$.

On reconnaît le nombre dérivé de $x \to x^2$ en 2, qui vaut bien $2\times 2 = 4$.

Questions fréquentes

Comment choisir la bonne technique ?

La forme de l'expression décide : des racines appellent la quantité conjuguée, des polynômes le terme dominant, une forme $\frac{0}{0}$ en un réel une factorisation, et la présence de e^x ou $\ln x$ les croissances comparées. Il est rare qu'un exercice de terminale sorte de ces quatre cas.

Que signifie « croissances comparées » ?

Que dans une compétition entre e^x, x^n et $\ln x$ en $+\infty$, l'exponentielle gagne toujours et le logarithme perd toujours, quelle que soit la puissance de x. C'est ce qui permet de conclure que $\frac{e^x}{x^{100}}$ tend quand même vers $+\infty$.