

Comment faire une démonstration par récurrence ?

LA RÉPONSE COURTE

Une récurrence se rédige en trois temps : **initialisation** (la propriété est vraie au premier rang), **hérédité** (si elle est vraie au rang n , alors elle l'est au rang $n+1$), **conclusion** (elle est donc vraie pour tout n).

La méthode en 5 étapes

1. Énoncer la propriété $P(n)$

On écrit précisément « Pour tout entier $n \geq n_0$, soit $P(n)$: ... ». Une propriété mal définie rend toute la suite illisible.

2. Initialisation

On vérifie $P(n_0)$ par un calcul explicite des deux membres. C'est court, mais indispensable : sans elle, la démonstration ne vaut rien.

3. Hypothèse de récurrence

« Supposons que pour un certain entier $n \geq n_0$, $P(n)$ soit vraie. » On l'écrit en toutes lettres : c'est elle qu'on utilisera.

4. Hérédité

On part du membre de gauche de $P(n+1)$, on y fait apparaître celui de $P(n)$ pour appliquer l'hypothèse, et on aboutit au membre de droite de $P(n+1)$.

5. Conclusion

« $P(n_0)$ est vraie et P est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. »

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$:

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La propriété

Pour tout $n \geq 1$, soit $P(n)$: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation

Pour $n = 1$: le membre de gauche vaut 1, celui de droite $\frac{1 \times 2}{2} = 1$. $P(1)$ est vraie.

Hérédité

Supposons $P(n)$ vraie pour un certain $n \geq 1$. Alors :

$1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$ par hypothèse de récurrence.

Calcul

$= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = (n+1) \times \frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, qui est bien le membre de droite de $P(n+1)$.

Conclusion

$P(1)$ est vraie et P est héréditaire : par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 1$, $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Les erreurs à ne pas faire

Sauter l'initialisation : une propriété héréditaire mais fausse au départ reste fausse partout.

Utiliser $P(n+1)$ pour démontrer $P(n+1)$: on part du membre de gauche, on n'a pas le droit de supposer l'égalité cherchée.

Oublier d'écrire l'hypothèse de récurrence là où elle est utilisée : c'est le point que le correcteur cherche.

Vérifier sur quelques valeurs et conclure : ce n'est pas une démonstration.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. Exercice 1

Démontrer que pour tout $n \geq 0$, $2^n \geq n+1$.

Voir le corrigé

Initialisation : pour $n = 0$, $2^0 = 1$ et $0+1 = 1$: vrai.

Hérédité : supposons $2^n \geq n+1$. Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2(n+1) = 2n+2$. Or $2n+2 \geq n+2$ car $n \geq 0$. Donc $2^{n+1} \geq n+2$.

Conclusion : par récurrence, l'inégalité est vraie pour tout $n \geq 0$.

2. Exercice 2

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 2$. Démontrer que $u_n = 2 \times 3^n - 1$.

Voir le corrigé

Initialisation : $u_0 = 1$ et $2 \times 3^0 - 1 = 1$: vrai.

Hérédité : si $u_n = 2 \times 3^n - 1$, alors

$$u_{n+1} = 3(2 \times 3^n - 1) + 2 = 2 \times 3^{n+1} - 3 + 2 = 2 \times 3^{n+1} - 1.$$

Conclusion : la formule est vraie pour tout n .

3. Exercice 3

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. Démontrer que pour tout n , $0 \leq u_n \leq 2$.

Voir le corrigé

Initialisation : $u_0 = 0$ vérifie bien $0 \leq 0 \leq 2$.

Hérédité : supposons $0 \leq u_n \leq 2$. Alors $2 \leq u_n + 2 \leq 4$, donc par croissance de la racine carrée $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2$. En particulier $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.

Conclusion : l'encadrement est vrai pour tout n .

Questions fréquentes

Pourquoi l'initialisation est-elle indispensable ?

Parce que l'hérédité seule ne dit rien du point de départ. La propriété « n est impair » est héréditaire au sens où si n est impair alors $n+2$ l'est aussi, mais elle est fausse pour $n = 2$. L'hérédité propage une vérité ; encore faut-il qu'il y en ait une à propager.

Quand doit-on penser à une récurrence ?

Quand l'énoncé le demande explicitement, quand une propriété doit être établie « pour tout entier n », ou quand une suite est définie **par récurrence** (u_{n+1} en fonction de u_n) et qu'on veut en démontrer une borne, une monotonie ou une forme explicite.