Comment factoriser un trinôme du second degré ?

LA RÉPONSE COURTE

Si le trinôme ax^2+bx+c a deux racines x_1 et x_2, il se factorise en $a(x-x_1)(x-x_2)$. Avec une racine double : $a(x-x_0)^2$. Si $\Delta<0$, aucune factorisation n'est possible dans $\mathbb{R}$.

La méthode en 5 étapes

1. **Tester les factorisations rapides**

   Facteur commun ou identité remarquable : $2x^2-8=2(x-2)(x+2)$ s'obtient sans discriminant.

2. **Calculer le discriminant**

   $\Delta=b^2-4ac$, comme pour la résolution.

3. **Trouver les racines**

   Avec les formules habituelles si $\Delta>0$, ou $x_0=\frac{-b}{2a}$ si $\Delta=0$.

4. **Écrire la forme factorisée**

   $a(x-x_1)(x-x_2)$. **Le coefficient a ne doit pas être oublié** : c'est l'erreur la plus fréquente.

5. **Vérifier en développant**

   On redéveloppe rapidement, au moins le terme constant : $a\times x_1\times x_2$ doit redonner c.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Factoriser $f(x)=3x^2+3x-18$.

Facteur commun

On peut d'abord sortir 3 : $f(x)=3(x^2+x-6)$. Les calculs seront plus simples.

Discriminant

Pour x^2+x-6 : $\Delta=1+24=25>0$, $\sqrt{\Delta}=5$.

Racines

$x_1=\frac{-1-5}{2}=-3$ et $x_2=\frac{-1+5}{2}=2$.

Forme factorisée

$x^2+x-6=(x+3)(x-2)$, donc $f(x)=3(x+3)(x-2)$.

Vérification

Terme constant : $3\times3\times(-2)=-18$. C'est bien celui de départ.

Conclusion. $f(x)=3(x+3)(x-2)$.

Les erreurs à ne pas faire

Oublier le coefficient a devant les parenthèses : $3x^2+3x-18$ n'est pas $(x+3)(x-2)$.

Se tromper de signe dans $(x-x_1)$: pour $x_1=-3$, le facteur est $(x+3)$.

Vouloir factoriser un trinôme de discriminant négatif : c'est impossible dans $\mathbb{R}$.

Confondre forme factorisée et forme canonique : la première fait apparaître les racines, la seconde le sommet.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. **Exercice 1**

   Factoriser $x^2-7x+12$.

   Voir le corrigé

   $\Delta=49-48=1$, racines $x_1=3$ et $x_2=4$.
   $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$.

2. **Exercice 2**

   Factoriser $-2x^2+8x-8$.

   Voir le corrigé

   $\Delta=64-4\times(-2)\times(-8)=64-64=0$: racine double $x_0=\frac{-8}{-4}=2$.
   $-2x^2+8x-8=-2(x-2)^2$.

3. **Exercice 3**

   Résoudre $x^2+2x-15\leq0$ après factorisation.

   Voir le corrigé

   $\Delta=4+60=64$, racines -5 et 3, donc $x^2+2x-15=(x+5)(x-3)$.
   Le trinôme est du signe de $a=1>0$ à l'extérieur des racines, négatif entre elles : $S=[-5;3]$.

Questions fréquentes

À quoi sert la forme factorisée ?

À lire immédiatement les racines, donc à résoudre $f(x)=0$, et à étudier le signe du trinôme grâce à un tableau de signes. La forme développée donne l'ordonnée à l'origine, la forme canonique donne le sommet : chaque écriture sert à une question différente.

Comment retrouver la forme canonique ?

$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha=\frac{-b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)$. Elle donne directement le sommet de la parabole, donc l'extremum de la fonction, ce que la forme factorisée ne montre pas.