

Comment étudier les variations d'une fonction ?

LA RÉPONSE COURTE

Une fonction est **croissante** sur un intervalle si elle conserve l'ordre ($a < b$ entraîne $f(a) \leq f(b)$), **décroissante** si elle l'inverse. On résume l'étude dans un tableau de variations, avec des flèches et les extremums.

La méthode en 5 étapes

1. Délimiter l'intervalle d'étude

Une fonction n'est pas croissante « en général » : elle l'est **sur un intervalle**. La fonction carré décroît sur $]-\infty; 0]$ et croît sur $[0; +\infty[$.

2. Utiliser les variations de référence

$x \rightarrow ax + b$: croissante si $a > 0$, décroissante si $a < 0$. $x \rightarrow x^2$: décroissante puis croissante, sommet en 0. $x \rightarrow \frac{1}{x}$: décroissante sur chacun des deux intervalles.

3. Revenir à la définition si nécessaire

On prend $a < b$ dans l'intervalle, on calcule $f(b) - f(a)$ et on étudie son signe : positif pour une fonction croissante, négatif pour une décroissante.

4. Dresser le tableau de variations

Première ligne : x avec les bornes et les valeurs charnières. Seconde ligne : des flèches montantes ou descendantes, et les images aux extrémités.

5. Lire les extremums

Un maximum est la plus grande valeur atteinte, un minimum la plus petite. On précise toujours **en quelle valeur de x** il est atteint.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 1$ sur $[-1; 5]$, dont le sommet est en $x = 2$. Dresser le tableau de variations et donner le minimum.

Forme de la courbe

Le coefficient de x^2 est positif : la parabole est tournée vers le haut, donc f décroît puis croît, avec un changement en $x = 2$.

Valeurs aux bornes

$$f(-1) = 1 + 4 + 1 = 6 ; f(2) = 4 - 8 + 1 = -3 ; f(5) = 25 - 20 + 1 = 6.$$

Tableau

Sur $[-1;2]$, f décroît de 6 à -3 ; sur $[2;5]$, elle croît de -3 à 6.

Extremum

La plus petite valeur atteinte est -3 , en $x = 2$.

Conclusion. f décroît sur $[-1;2]$ puis croît sur $[2;5]$. Son minimum vaut -3 , atteint en $x = 2$.

Les erreurs à ne pas faire

Dire qu'une fonction est croissante sans préciser l'intervalle.

Confondre le minimum (une **image**, ici -3) et la valeur où il est atteint (un **antécédent**, ici 2).

Affirmer que $x \rightarrow \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^*$: elle l'est sur chacun des deux intervalles séparément, pas sur leur réunion.

Lire le tableau à l'envers : les flèches décrivent les images, pas les x .

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déploie ensuite.

1. Exercice 1

Donner les variations de $f(x) = -3x + 5$ sur $\mathbb{R}$, en justifiant.

Voir le corrigé

C'est une fonction affine de coefficient directeur $a = -3$, qui est négatif.

Donc f est **décroissante** sur $\mathbb{R}$.

2. Exercice 2

f est croissante sur $[0;10]$ avec $f(2) = 7$. Que peut-on dire de $f(5)$?

Voir le corrigé

La fonction est croissante et $2 < 5$, donc $f(2) \leq f(5)$.

On peut affirmer que $f(5) \geq 7$, sans pouvoir en dire plus.

3. Exercice 3

Soit $f(x) = x^2$ sur $[-3;2]$. Quel est le maximum de f et où est-il atteint ?

Voir le corrigé

f décroît sur $[-3;0]$ puis croît sur $[0;2]$. Les valeurs aux bornes valent $f(-3) = 9$ et $f(2) = 4$.

Le maximum vaut 9, atteint en $x = -3$; le minimum vaut 0, atteint en $x = 0$.

Questions fréquentes

Comment comparer deux images sans calculer ?

On utilise le sens de variation : si f est croissante sur un intervalle contenant a et b avec $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$; si elle est décroissante, l'inégalité s'inverse. C'est ainsi qu'on compare $\sqrt{7}$ et $\sqrt{9}$ ou $(-3)^2$ et $(-5)^2$ sans machine.

Comment obtient-on les variations en première ?

Avec la **dérivée** : on étudie son signe, et la fonction croît là où la dérivée est positive. La seconde s'appuie sur les fonctions de référence et la définition ; la première donne l'outil général.