

Comment étudier les variations d'une fonction avec la dérivée ?

LA RÉPONSE COURTE

On calcule f' , on étudie **son signe**, et on en déduit les variations : f est croissante là où f' est positive, décroissante là où f' est négative. Un changement de signe de f' signale un extremum.

La méthode en 5 étapes

1. Donner l'ensemble de définition

Les variations s'étudient sur cet ensemble ; les valeurs interdites y créent des coupures.

2. Calculer la dérivée

Avec les formules d'opérations. On garde une forme factorisée : c'est elle qui permettra d'étudier le signe.

3. Étudier le signe de f'

Tableau de signes si f' est un produit ou un quotient ; règle du signe du trinôme si f' est du second degré. Un dénominateur au carré est toujours positif : seul le numérateur compte.

4. Dresser le tableau de variations

Trois lignes : x , le signe de $f'(x)$, puis les variations de f avec des flèches et les images aux points charnières.

5. Conclure sur les extremums

f' passant du $+$ au $-$: maximum local. Du $-$ au $+$: minimum local. On calcule la valeur de f en ce point.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Étudier les variations de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$.

Dérivée

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2).$$

Signe de f'

Racines : 0 et 2. Coefficient dominant $3 > 0$: f' est positive à l'extérieur de $[0;2]$ et négative entre 0 et 2.

Variations

f est croissante sur $] -\infty; 0]$, décroissante sur $[0; 2]$, croissante sur $[2; +\infty[$.

Extremums

$f(0) = 2$: maximum local. $f(2) = 8 - 12 + 2 = -2$: minimum local.

Conclusion. f croît jusqu'à un maximum local de 2 en $x = 0$, décroît jusqu'à un minimum local de -2 en $x = 2$, puis croît de nouveau.

Les erreurs à ne pas faire

Étudier le signe de f au lieu de celui de f' .

Conclure à un extremum dès que f' s'annule : il faut un **changement de signe**.

Oublier qu'un dénominateur au carré est toujours strictement positif, et perdre du temps à l'étudier.

Relier les deux branches d'une fonction non définie en un point : le tableau doit comporter une double barre.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. Exercice 1

Étudier les variations de $f(x) = x^2 - 6x + 5$ sur $\mathbb{R}$.

Voir le corrigé

$f'(x) = 2x - 6$, qui s'annule en 3, négative avant, positive après.
 f décroît sur $]-\infty; 3]$ puis croît sur $[3; +\infty[$. Minimum : $f(3) = -4$.

2. Exercice 2

Étudier les variations de $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ sur son ensemble de définition.

Voir le corrigé

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}. \quad f'(x) = \frac{1 \times (x+2) - (x-1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}.$$

Le numérateur est positif et le dénominateur aussi : $f' > 0$. La fonction est **croissante sur chacun** des deux intervalles $]-\infty; -2[$ et $]-2; +\infty[$.

3. Exercice 3

Un enclos rectangulaire est adossé à un mur ; on dispose de 60 m de grillage pour les trois autres côtés. Quelle largeur maximise l'aire ?

Voir le corrigé

Si x est la largeur (deux côtés), la longueur vaut $60 - 2x$ et l'aire est
 $A(x) = x(60 - 2x) = 60x - 2x^2$ sur $]0; 30[$.

$A'(x) = 60 - 4x$, qui s'annule en $x = 15$, positive avant, négative après : A atteint un maximum en $x = 15$.

La largeur optimale est 15 m, pour une longueur de 30 m et une aire de 450 m².

Questions fréquentes

Pourquoi le signe de la dérivée donne-t-il les variations ?

Parce que $f'(a)$ est la pente de la tangente en a . Une pente positive signifie une tangente montante, donc une fonction qui croît localement. Le théorème qui relie signe de f' et sens de variation généralise cette lecture à tout un intervalle.

Que faire si la dérivée ne se factorise pas ?

Si f' est un trinôme, on utilise le discriminant et la règle du signe. Si elle est plus compliquée, on étudie ses variations à son tour en calculant f'' , ou on s'appuie sur le théorème des valeurs intermédiaires pour localiser ses racines. C'est un travail de terminale.