Comment étudier le signe d'un trinôme ?

LA RÉPONSE COURTE

Un trinôme est **du signe de a à l'extérieur des racines** et du signe contraire entre elles. Si $\Delta<0$, il garde le signe de a partout ; si $\Delta=0$, il garde le signe de a en s'annulant en un point.

La méthode en 5 étapes

1. **Calculer le discriminant**

   Il décide du nombre de racines, donc de la forme du tableau de signes.

2. **Déterminer les racines**

   Si $\Delta>0$, on calcule x_1 et x_2 et on les range dans l'ordre croissant.

3. **Appliquer la règle du signe**

   À l'extérieur de $[x_1;x_2]$, le trinôme est du signe de a ; entre les racines, du signe opposé.

4. **Dresser le tableau de signes**

   Une ligne pour x, une pour le trinôme, avec des zéros sous les racines.

5. **Conclure sur l'inéquation**

   On lit les intervalles où le signe convient. Crochets fermés pour une inégalité large, ouverts pour une stricte.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Résoudre $-x^2+4x+5>0$.

Identification

$a=-1$, $b=4$, $c=5$.

Discriminant et racines

$\Delta=16+20=36>0$, $\sqrt{\Delta}=6$. $x_1=\dfrac{-4-6}{-2}=5$ et $x_2=\dfrac{-4+6}{-2}=-1$. Rangées : -1 puis 5.

Règle du signe

$a=-1<0$: le trinôme est **négatif** à l'extérieur de $[-1;5]$ et **positif** entre -1 et 5.

Lecture

On cherche les x où le trinôme est strictement positif : c'est l'intervalle ouvert entre les racines.

Conclusion. $S=]-1;5[$.

Les erreurs à ne pas faire

Oublier le signe de a : avec $a<0$, tout le tableau est inversé.

Ranger les racines dans l'ordre où elles ont été calculées plutôt qu'en ordre croissant.

Conclure « aucune solution » quand $\Delta<0$: le trinôme ne s'annule pas, mais il garde un signe constant, et l'inéquation peut avoir $\mathbb{R}$ pour solution.

Inclure les racines dans une inégalité stricte.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. **Exercice 1**

   Étudier le signe de $x^2-3x-10$.

   Voir le corrigé

   $\Delta=9+40=49$, racines -2 et 5. Comme $a=1>0$:
   positif sur $]-\infty;-2[$ et $]5;+\infty[$, négatif sur $]-2;5[$, nul en -2 et 5.

2. **Exercice 2**

   Résoudre $x^2+x+3>0$.

   Voir le corrigé

   $\Delta=1-12=-11<0$: pas de racine. Le trinôme garde donc le signe de $a=1>0$ sur tout $\mathbb{R}$.
   $S=\mathbb{R}$: l'inéquation est vraie pour tout réel.

3. **Exercice 3**

   Résoudre $2x^2-8x\geq 0$.

   Voir le corrigé

   On factorise : $2x(x-4)\geq 0$, racines 0 et 4, avec $a=2>0$.
   Le trinôme est positif à l'extérieur des racines : $S=]-\infty;0]\cup[4;+\infty[$.

Questions fréquentes

Comment retenir la règle du signe ?

Par la parabole : si $a>0$ elle est tournée vers le haut, donc elle passe sous l'axe seulement entre ses deux racines. « Du signe de a à l'extérieur des racines » n'est qu'une traduction de ce dessin, qu'il vaut mieux savoir refaire que mémoriser.

Et si le trinôme est au dénominateur ?

On étudie son signe de la même façon, mais ses racines deviennent des **valeurs interdites** : on les marque d'une double barre dans le tableau et elles ne peuvent jamais appartenir à l'ensemble des solutions.