

Comment étudier la convergence d'une suite ?

LA RÉPONSE COURTE

Trois outils principaux : les **limites de référence** (dont q^n selon la valeur de q), le **théorème de la limite monotone** (une suite croissante et majorée converge), et le **théorème des gendarmes** quand la suite est encadrée.

La méthode en 5 étapes

1. Reconnaître une suite usuelle

Géométrie de raison q : si $-1 < q < 1$, alors $q^n \rightarrow 0$; si $q > 1$, $q^n \rightarrow +\infty$. Arithmétique de raison non nulle : la limite est infinie, du signe de la raison.

2. Étudier la monotonie

Signe de $u_{n+1} - u_n$, ou comparaison de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 pour une suite à termes strictement positifs.

3. Chercher une borne

Une démonstration par récurrence établit souvent que la suite est majorée ou minorée.

4. Appliquer le théorème de la limite monotone

Croissante et majorée : la suite converge. Décroissante et minorée : elle converge aussi.
Croissante et non majorée : elle tend vers $+\infty$.

5. Déterminer la limite

Pour une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue, la limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$: on résout cette équation, puis on choisit la solution compatible avec l'encadrement établi.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{2}$. Montrer qu'elle est croissante et majorée par 6, puis déterminer sa limite.

Majoration par récurrence

$u_0 = 0 \leq 6$. Si $u_n \leq 6$, alors $u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{2} \leq \frac{12}{2} = 6$. Donc $u_n \leq 6$ pour tout n .

Monotonie

$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 6}{2} - u_n = \frac{6 - u_n}{2} \geq 0$ puisque $u_n \leq 6$. La suite est croissante.

Convergence

Croissante et majorée par 6 : d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers un réel $\ell \leq 6$.

Valeur de la limite

La fonction $x \rightarrow \frac{x+6}{2}$ est continue, donc $\ell = \frac{\ell+6}{2}$, soit $2\ell = \ell+6$ et $\ell = 6$.

Conclusion. (u_n) est croissante, majorée par 6, et converge vers 6.

Les erreurs à ne pas faire

Conclure qu'une suite croissante converge : il faut **aussi** qu'elle soit majorée.

Résoudre $\ell = f(\ell)$ sans avoir démontré la convergence au préalable : cette équation donne la limite *si* elle existe.

Oublier de discuter la valeur de q pour une suite géométrique, notamment le cas $q \leq -1$ où la suite n'a pas de limite.

Confondre majorée et convergente : $u_n = (-1)^n$ est bornée mais ne converge pas.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déploie ensuite.

1. Exercice 1

Déterminer la limite de $u_n = 3 \times 0,8^n$ et de $v_n = 2 \times 1,5^n$.

Voir le corrigé

$0,8 \in]-1;1[$ donc $0,8^n \rightarrow 0$: $u_n \rightarrow 0$.

$1,5 > 1$ donc $1,5^n \rightarrow +\infty$: $v_n \rightarrow +\infty$.

2. Exercice 2

Déterminer la limite de $u_n = \frac{2n+3}{n+1}$.

Voir le corrigé

Forme $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise par n : $\frac{n(2+\frac{3}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}$.

La limite vaut 2.

3. Exercice 3

Soit $u_n = \frac{\sin n}{n}$ pour $n \geq 1$. Déterminer sa limite.

Voir le corrigé

Pour tout $n \geq 1$: $-1 \leq \sin n \leq 1$, donc $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.

Les deux bornes tendent vers 0 : d'après le théorème des gendarmes, $u_n \rightarrow 0$.

Questions fréquentes

Une suite peut-elle ne pas avoir de limite ?

Oui : $u_n = (-1)^n$ alterne entre -1 et 1 sans jamais se stabiliser. Elle est pourtant bornée. Il faut donc distinguer trois comportements : convergence vers un réel, divergence vers l'infini, et absence de limite.

À quoi sert le théorème des gendarmes ?

À conclure sur une suite compliquée en l'encadrant par deux suites simples de même limite. Il s'applique typiquement aux expressions contenant $\sin n$ ou $\cos n$, que l'on encadre par -1 et 1 avant de diviser par une quantité qui tend vers l'infini.