Comment déterminer une représentation paramétrique d'une droite ?

LA RÉPONSE COURTE

Il faut un **point** A et un **vecteur directeur** $\vec{u}$. La droite est alors l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, ce qui s'écrit coordonnée par coordonnée avec un paramètre t réel.

La méthode en 5 étapes

1. **Trouver un point de la droite**

   Il est donné, ou bien on prend l'un des deux points connus.

2. **Trouver un vecteur directeur**

   Avec deux points : $\overrightarrow{AB}$. Si la droite est parallèle à une autre, on reprend le vecteur directeur de celle-ci.

3. **Écrire le système**

   $\begin{cases} x = x_A + t\,a \\ y = y_A + t\,b \\ z = z_A + t\,c \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$, où $(a;b;c)$ sont les coordonnées du vecteur directeur.

4. **Préciser le paramètre**

   On n'oublie pas d'écrire « $t \in \mathbb{R}$ » : sans cette mention, le système ne décrit pas la droite entière.

5. **Tester l'appartenance d'un point**

   On résout les trois équations en t : le point appartient à la droite si et seulement si **la même valeur** de t convient pour les trois coordonnées.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

$A(1;2;-1)$ et $B(3;5;1)$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB), puis dire si $C(7;11;3)$ appartient à cette droite.

Vecteur directeur

$\overrightarrow{AB}\,(2;3;2)$.

Système

$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+3t \\ z = -1+2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Test sur C

$7=1+2t$ donne $t=3$; $11=2+3t$ donne $t=3$; $3=-1+2t$ donne $t=2$.

Conclusion du test

Les deux premières équations donnent $t=3$, la troisième $t=2$: aucune valeur ne convient simultanément.

Conclusion. Une représentation paramétrique de (AB) est $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \\ z=-1+2t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$, et le point C **n'appartient pas** à cette droite.

Les erreurs à ne pas faire

Oublier de préciser $t\in\mathbb{R}$.

Tester l'appartenance d'un point en trouvant un t différent pour chaque coordonnée : la valeur doit être la même partout.

Croire qu'une droite n'a qu'une seule représentation paramétrique : changer de point ou multiplier le vecteur directeur par un réel non nul donne une écriture différente de la même droite.

Confondre représentation paramétrique (une droite dans l'espace) et équation cartésienne (un plan dans l'espace).

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. **Exercice 1**

   Donner une représentation paramétrique de la droite passant par $D(0;1;4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(1;-2;3)$.

   Voir le corrigé

   $\begin{cases} x=t \\ y=1-2t \\ z=4+3t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

2. **Exercice 2**

   Le point $P(2;-3;10)$ appartient-il à la droite précédente ?

   Voir le corrigé

   $x=2$ donne $t=2$; $y=1-2t=-3$ donne $t=2$; $z=4+3t=10$ donne $t=2$.

   La même valeur convient pour les trois : le point P **appartient** à la droite.

3. **Exercice 3**

Les droites $d_1 : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = 3-t \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x = 4-2s \\ y = 1-4s \\ z = 2s \end{cases}$ sont-elles parallèles ?

Voir le corrigé

Vecteurs directeurs : $\vec{u}\ (1;2;-1)$ et $\vec{v}\ (-2;-4;2)$.

On remarque que $\vec{v} = -2\vec{u}$: les vecteurs sont colinéaires, donc les droites sont **parallèles**.

Questions fréquentes

Que représente le paramètre t ?

Il mesure le déplacement le long de la droite à partir du point A : $t = 0$ donne A, $t = 1$ donne le point obtenu en ajoutant une fois le vecteur directeur. Chaque valeur réelle de t correspond à exactement un point de la droite.

Comment savoir si deux droites de l'espace se coupent ?

On résout le système obtenu en égalant leurs trois coordonnées, avec deux paramètres distincts t et s. Si le système a une solution, les droites se coupent au point correspondant ; sinon, et si elles ne sont pas parallèles, elles sont **non coplanaires**, situation propre à l'espace.