Comment déterminer une équation cartésienne de plan ?

LA RÉPONSE COURTE

Un plan de **vecteur normal** $\vec{n}\,(a;b;c)$ a une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$. On trouve d en remplaçant par les coordonnées d'un point du plan.

La méthode en 5 étapes

1. **Trouver un vecteur normal**

   Il est donné, ou bien il s'obtient à partir de trois points : on cherche $\vec{n}$ orthogonal à deux vecteurs du plan, en résolvant $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

2. **Écrire l'équation à une constante près**

   Les coordonnées du vecteur normal sont directement les coefficients : $ax+by+cz+d=0$.

3. **Calculer d**

   On remplace x, y, z par les coordonnées d'un point connu du plan, et on résout en d.

4. **Vérifier**

   On teste l'équation avec un autre point du plan : elle doit être satisfaite.

5. **Utiliser l'équation**

   Un point appartient au plan si ses coordonnées vérifient l'équation. Deux plans sont parallèles si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par $A(1;2;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}\,(2;-1;4)$. Le point $B(0;4;3)$ appartient-il à P ?

Forme de l'équation

Le vecteur normal donne les coefficients : $2x-y+4z+d=0$.

Calcul de d

A appartient au plan : $2\times1-2+4\times3+d=0$, soit $2-2+12+d=0$ et $d=-12$.

Équation

$2x-y+4z-12=0$.

Test de B

$2\times0-4+4\times3-12=-4+12-12=-4\neq0$.

Conclusion. Le plan a pour équation $2x-y+4z-12=0$, et le point B ne lui appartient pas.

Les erreurs à ne pas faire

Confondre vecteur normal (perpendiculaire au plan) et vecteur directeur (contenu dans le plan).

Oublier de calculer d et laisser l'équation incomplète.

Se tromper de signe dans le calcul de d.

Croire qu'une équation de plan décrit une droite : dans l'espace, une seule équation cartésienne définit un plan, une droite demande un système.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. **Exercice 1**

   Déterminer une équation du plan passant par $C(0;0;5)$ et de vecteur normal $\vec{n}\ (1;1;1)$.

   Voir le corrigé

   $x+y+z+d=0$, et C donne $5+d=0$, soit $d=-5$.
   Équation : $x+y+z-5=0$.

2. **Exercice 2**

   Les plans d'équations $2x-y+3z-1=0$ et $-4x+2y-6z+7=0$ sont-ils parallèles ?

   Voir le corrigé

   Vecteurs normaux : $\vec{n}_1\ (2;-1;3)$ et $\vec{n}_2\ (-4;2;-6)=-2\vec{n}_1$.
   Ils sont colinéaires : les plans sont **parallèles**. Ils ne sont pas confondus, car $-2\times(-1)\neq 7$.

3. **Exercice 3**

   La droite de vecteur directeur $\vec{u}\ (1;2;-1)$ est-elle parallèle au plan d'équation $x+y+3z-4=0$?

   Voir le corrigé

   Vecteur normal du plan : $\vec{n}\ (1;1;3)$. On calcule $\vec{u}\cdot\vec{n}=1+2-3=0$.
   Le vecteur directeur est orthogonal au vecteur normal : la droite est **parallèle au plan** (ou contenue dedans).

Questions fréquentes

Comment trouver un vecteur normal à partir de trois points ?

On forme deux vecteurs du plan, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis on cherche $\vec{n}\ (a;b;c)$ vérifiant $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. Le système a deux équations et trois inconnues : on fixe l'une d'elles, par exemple $c=1$, et on résout.

Comment calculer la distance d'un point à un plan ?

Par la formule $d(M;P)=\frac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. On peut aussi passer par le projeté orthogonal : on écrit la droite passant par M de vecteur directeur $\vec{n}$, on cherche son intersection avec le plan, puis on calcule la distance entre les deux points.