

Comment déterminer l'équation d'une tangente ?

LA RÉPONSE COURTE

La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
Il faut donc trois nombres : a , $f(a)$ et $f'(a)$.

La méthode en 5 étapes

1. Repérer le point de tangence

L'abscisse a est donnée par l'énoncé (« au point d'abscisse 2 »).

2. Calculer $f(a)$

C'est l'ordonnée du point de contact.

3. Calculer la dérivée puis $f'(a)$

On dérive la fonction, **puis** on remplace x par a . Dériver après avoir remplacé donnerait toujours zéro.

4. Remplacer dans la formule

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$, puis on développe et on réduit pour obtenir la forme $y = mx + p$.

5. Vérifier

La tangente doit passer par le point de tangence : en remplaçant x par a dans l'équation trouvée, on doit obtenir $f(a)$.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Soit $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Déterminer l'équation de la tangente à sa courbe au point d'abscisse $a = 2$.

$f(2)$

$f(2) = 4 - 6 + 4 = 2$. Le point de tangence est $A(2;2)$.

La dérivée

$f'(x) = 2x - 3$.

$f'(2)$

$f'(2) = 4 - 3 = 1$: le coefficient directeur de la tangente vaut 1.

Équation

$y = 1 \times (x - 2) + 2 = x - 2 + 2$, soit $y = x$.

Vérification

Pour $x = 2$, l'équation donne $y = 2 = f(2)$. La tangente passe bien par le point de contact.

Conclusion. La tangente au point d'abscisse 2 a pour équation $y = x$.

Les erreurs à ne pas faire

Confondre $f(a)$ et $f'(a)$ dans la formule : $f'(a)$ est la pente, $f(a)$ l'ordonnée du point.

Remplacer x par a avant de dériver.

Écrire $(x+a)$ au lieu de $(x-a)$.

Oublier de réduire l'équation finale sous la forme $y = mx + p$ quand l'énoncé la demande.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. Exercice 1

Soit $f(x) = x^3$. Déterminer la tangente au point d'abscisse 1.

Voir le corrigé

$$f(1) = 1 ; f'(x) = 3x^2 \text{ donc } f'(1) = 3.$$

$$y = 3(x-1) + 1 = 3x - 2.$$

2. Exercice 2

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$. Déterminer la tangente au point d'abscisse 2.

Voir le corrigé

$$f(2) = \frac{1}{2} ; f'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ donc } f'(2) = -\frac{1}{4}.$$

$$y = -\frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2} = -\frac{x}{4} + 1.$$

3. Exercice 3

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 1$. En quel point la tangente est-elle horizontale ?

Voir le corrigé

Une tangente horizontale a un coefficient directeur nul : on résout $f'(x) = 0$, soit $2x - 4 = 0$ et $x = 2$.

$f(2) = 4 - 8 + 1 = -3$: la tangente est horizontale au point $(2; -3)$, qui est le sommet de la parabole. Son équation est $y = -3$.

Questions fréquentes

Que signifie une tangente horizontale ?

Que $f'(a) = 0$: la fonction ne varie pas instantanément en ce point. C'est souvent le signe d'un extremum local, mais pas toujours : pour $f(x) = x^3$ en 0 , la dérivée s'annule sans que la fonction change de sens de variation.

La courbe peut-elle couper sa tangente ?

Oui. La tangente touche la courbe en un point et lui ressemble localement, mais rien ne l'empêche de la traverser, comme pour $x \rightarrow x^3$ à l'origine, ni de la recouper ailleurs. « Tangente » est une propriété locale, pas globale.