Comment calculer une limite ?

LA RÉPONSE COURTE

On commence toujours par **remplacer** pour voir ce qui se passe. Si le calcul aboutit, la limite est trouvée ; s'il donne une des quatre **formes indéterminées** ($\infty-\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\times\infty$, $\frac{0}{0}$), il faut transformer l'expression.

La méthode en 5 étapes

1. **Identifier le point d'étude**

   Limite en $+\infty$, en $-\infty$, ou en un réel a ? Et, en un réel, à gauche ou à droite ? Cela change parfois le résultat.

2. **Utiliser les limites de référence**

   $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$; $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x=-\infty$.

3. **Appliquer les opérations sur les limites**

   Somme, produit, quotient : les règles fonctionnent tant qu'on ne tombe pas sur une forme indéterminée.

4. **Détecter une forme indéterminée**

   Les quatre formes à connaître : $\infty-\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\times\infty$ et $\frac{0}{0}$. Elles ne signifient pas « pas de limite » mais « il faut transformer ».

5. **Interpréter graphiquement**

   Une limite finie ℓ en $\pm\infty$ donne une **asymptote horizontale** $y=\ell$; une limite infinie en a donne une **asymptote verticale** $x=a$.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2+5}{x^2-1}$ et $\lim\limits_{x\to2^+} \frac{1}{x-2}$.

Premier calcul direct

Numérateur et dénominateur tendent vers $+\infty$: c'est la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

Factorisation par le terme dominant

$$\frac{3x^2+5}{x^2-1}=\frac{x^2\left(3+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{3+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}.$$

Passage à la limite

Les termes en $\frac{1}{x^2}$ tendent vers 0 : la limite vaut $\frac{3}{1}=3$. La courbe admet l'asymptote horizontale $y=3$.

Second calcul

Quand $x \to 2^+$, on a $x-2 \to 0$ en restant **positif**, donc $\frac{1}{x-2} \to +\infty$. La droite $x=2$ est asymptote verticale.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2+5}{x^2-1}=3$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2}=+\infty$.

Les erreurs à ne pas faire

Écrire $\frac{\infty}{\infty}=1$: une forme indéterminée n'a pas de valeur, elle demande un calcul.

Oublier d'étudier le signe du dénominateur qui tend vers zéro : à gauche et à droite, les limites sont souvent opposées.

Confondre « la limite est infinie » et « la limite n'existe pas » : ce sont deux situations différentes.

Appliquer une limite de référence sans vérifier le sens de variation du point d'étude ($+\infty$ ou $-\infty$).

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. **Exercice 1**

   Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3-5x)$.

   Voir le corrigé

   Forme $\infty-\infty$. On factorise par le terme dominant : $x^3\left(1-\frac{5}{x^2}\right)$.

   $x^3 \to +\infty$ et la parenthèse tend vers 1 : la limite vaut $+\infty$.

2. **Exercice 2**

   Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x+1}{x^2+3}$.

   Voir le corrigé

   Forme $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise : $\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}=\frac{1}{x}\times\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x^2}}$.

   Le premier facteur tend vers 0, le second vers 2 : la limite vaut 0. La courbe a pour asymptote l'axe des abscisses.

3. **Exercice 3**

Calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{3}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{3}{x}$.

Voir le corrigé

À gauche, x tend vers 0 en restant négatif : le quotient tend vers $-\infty$.

À droite, x reste positif : le quotient tend vers $+\infty$. Les deux limites diffèrent, la fonction n'a pas de limite en 0.

Questions fréquentes

Combien y a-t-il de formes indéterminées ?

Quatre : $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$ et $\frac{0}{0}$. Toutes les autres situations se règlent par les règles d'opérations. Savoir les reconnaître immédiatement évite de chercher à transformer une expression qui n'en a pas besoin.

Comment lire une limite sur un graphique ?

Une asymptote horizontale $y = \ell$ traduit une limite finie ℓ à l'infini ; une asymptote verticale $x = a$ traduit une limite infinie en a. Attention, la courbe peut couper une asymptote horizontale : l'asymptote décrit le comportement à l'infini, pas une barrière.