

Comment calculer une intégrale ?

LA RÉPONSE COURTE

On cherche une primitive F de la fonction, puis on applique $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. La constante d'intégration se simplifie : inutile de l'écrire.

La méthode en 5 étapes

1. Vérifier la continuité

La fonction doit être continue sur $[a; b]$. Une valeur interdite à l'intérieur de l'intervalle rend l'intégrale impossible à calculer ainsi.

2. Déterminer une primitive

Avec les formes de référence ou les formes en u . On peut choisir $C = 0$, puisque la constante disparaît dans la soustraction.

3. Appliquer le théorème fondamental

$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, en respectant l'ordre : borne du haut moins borne du bas.

4. Calculer proprement

On garde la valeur exacte ($\ln 3$, $e^2 - 1$) avant de donner une valeur approchée si elle est demandée.

5. Interpréter

Si $f \geq 0$ sur $[a; b]$, l'intégrale est l'**aire** sous la courbe, en unités d'aire. La **valeur moyenne** de f vaut $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Calculer $I = \int_0^2 (3x^2 + 1) dx$ et $J = \int_1^e \frac{1}{x} dx$.

Primitive pour I

$F(x) = x^3 + x$.

Calcul de I

$$I = [x^3 + x]_0^2 = (8 + 2) - (0 + 0) = 10.$$

Primitive pour J

Sur $[1; e]$, une primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln x$.

Calcul de J

$$J = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

Conclusion. $I = 10$ et $J = 1$. Comme les deux fonctions sont positives sur leurs intervalles, ces nombres sont les aires sous les courbes, en unités d'aire.

Les erreurs à ne pas faire

Inverser les bornes : $F(a) - F(b)$ donne l'opposé du résultat.

Oublier que l'intégrale d'une fonction **négative** est négative : l'aire, elle, est l'opposé de l'intégrale.

Intégrer sur un intervalle contenant une valeur interdite, par exemple $\frac{1}{x}$ entre -1 et 1 .

Ajouter la constante C dans le calcul : elle se simplifie systématiquement.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. **Exercice 1**

Calculer $\int_1^3 (2x - 4) dx$.

Voir le corrigé

Primitive : $x^2 - 4x$. Puis $(9 - 12) - (1 - 4) = -3 + 3 = 0$.

L'intégrale vaut 0 : les aires au-dessus et au-dessous de l'axe se compensent exactement.

2. **Exercice 2**

Calculer $\int_0^1 e^{2x} dx$.

Voir le corrigé

Primitive : $\frac{1}{2}e^{2x}$.

$$\left[\frac{1}{2}e^{2x} \right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 1}{2} \approx 3,19.$$

3. Exercice 3

Calculer la valeur moyenne de $f(x) = x^2$ sur $[0;3]$.

Voir le corrigé

$$\int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 9.$$

Valeur moyenne : $\frac{1}{3-0} \times 9 = 3$.

Questions fréquentes

Intégrale et aire, est-ce la même chose ?

Seulement si la fonction est positive sur l'intervalle. Sinon, l'intégrale compte négativement les portions situées sous l'axe. Pour obtenir l'aire géométrique, on découpe l'intervalle selon le signe de f et on prend les valeurs absolues.

Qu'est-ce que l'intégration par parties ?

La formule $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$, qui transforme une intégrale difficile en une plus simple. On l'utilise notamment pour xe^x ou $\ln x$, quand aucune primitive n'apparaît directement.