Comment calculer une dérivée ?

LA RÉPONSE COURTE

On décompose la fonction, on applique les **dérivées de référence** (x^n donne nx^{n-1}), puis les formules d'opérations : $(uv)' = u'v + uv'$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

La méthode en 5 étapes

1. **Reconnaître la structure**

   Somme, produit, quotient, ou fonction de référence ? C'est ce qui choisit la formule. Une somme se dérive terme à terme, c'est le cas le plus simple.

2. **Utiliser les dérivées de référence**

   $(x^n)' = nx^{n-1}$; $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $(e^x)' = e^x$. Une constante a une dérivée nulle.

3. **Poser u et v explicitement**

   Pour un produit ou un quotient, on écrit à part u, u', v, v' avant d'appliquer la formule. C'est ce qui évite la plupart des erreurs.

4. **Appliquer la formule**

   $(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, où le **signe moins** et l'ordre des termes sont essentiels.

5. **Réduire**

   On développe le numérateur et on réduit, mais on garde le dénominateur factorisé : c'est lui qui servira ensuite pour le signe.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Dériver $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$ et $g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$.

La somme

Terme à terme : $(3x^4)' = 12x^3$, $(-5x^2)' = -10x$, $(7)' = 0$.

$f'(x) = 12x^3 - 10x$

Le quotient : u et v

$u = 2x+1$ donc $u' = 2$; $v = x-3$ donc $v' = 1$.

Formule

$$g'(x)=\frac{2(x-3)-(2x+1)\times 1}{(x-3)^2}$$

Réduction

Numérateur : $2x-6-2x-1=-7$.

$$g'(x)=\frac{-7}{(x-3)^2}$$

Conclusion. $f'(x)=12x^3-10x$ et $g'(x)=\frac{-7}{(x-3)^2}$, qui est négative sur tout l'ensemble de définition : g est décroissante sur chacun de ses intervalles.

Les erreurs à ne pas faire

Dériver un produit en multipliant les dérivées : $(uv)'\neq u'v'$.

Inverser l'ordre au numérateur du quotient : c'est $u'v-uv'$, et le changement d'ordre inverse le signe.

Oublier de dériver l'intérieur d'une composée : $(e^{3x})'=3e^{3x}$.

Développer le dénominateur $(x-3)^2$: le garder factorisé facilite l'étude du signe.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. **Exercice 1**

   Dériver $f(x)=x^3-4x+1$ et $g(x)=5x^2-\frac{1}{x}$.

   Voir le corrigé

   $f'(x)=3x^2-4$.

   $g'(x)=10x+\frac{1}{x^2}$, car la dérivée de $-\frac{1}{x}$ vaut $+\frac{1}{x^2}$.

2. **Exercice 2**

   Dériver $h(x)=(2x-1)(x^2+3)$.

   Voir le corrigé

   $u=2x-1$, $u'=2$; $v=x^2+3$, $v'=2x$.

   $h'(x)=2(x^2+3)+(2x-1)\times 2x=2x^2+6+4x^2-2x=6x^2-2x+6$.

3. **Exercice 3**

   Dériver $k(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

   Voir le corrigé

   $u=x^2$, $u'=2x$; $v=x+1$, $v'=1$.

$k'(x)=\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$, soit $\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

Questions fréquentes

Que représente le nombre dérivé ?

$f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe au point d'abscisse a. C'est aussi une vitesse de variation instantanée : en physique, la dérivée de la position par rapport au temps est la vitesse.

Faut-il apprendre les formules par cœur ?

Oui, elles sont utilisées à chaque exercice d'analyse jusqu'en terminale. Le plus rentable est de savoir les reconnaître vite : poser u, u', v, v' avant d'écrire la formule fait gagner plus de temps que d'essayer de tout faire de tête.