

Comment calculer une dérivée ?

LA RÉPONSE COURTE

On décompose la fonction, on applique les **dérivées de référence** (x^n donne nx^{n-1}), puis les formules d'opérations : $(uv)' = u'v + uv'$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

La méthode en 5 étapes

1. Reconnaître la structure

Somme, produit, quotient, ou fonction de référence ? C'est ce qui choisit la formule. Une somme se dérive terme à terme, c'est le cas le plus simple.

2. Utiliser les dérivées de référence

$(x^n)' = nx^{n-1}$; $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $(e^x)' = e^x$. Une constante a une dérivée nulle.

3. Poser u et v explicitement

Pour un produit ou un quotient, on écrit à part u , u' , v , v' avant d'appliquer la formule. C'est ce qui évite la plupart des erreurs.

4. Appliquer la formule

$(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, où le **signe moins** et l'ordre des termes sont essentiels.

5. Réduire

On développe le numérateur et on réduit, mais on garde le dénominateur factorisé : c'est lui qui servira ensuite pour le signe.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Dériver $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$ et $g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$.

La somme

Terme à terme : $(3x^4)' = 12x^3$, $(-5x^2)' = -10x$, $(7)' = 0$.

$$f'(x) = 12x^3 - 10x$$

Le quotient : u et v

$u = 2x+1$ donc $u' = 2$; $v = x-3$ donc $v' = 1$.

Formule

$$g'(x) = \frac{2(x-3) - (2x+1) \times 1}{(x-3)^2}$$

Réduction

Numérateur : $2x - 6 - 2x - 1 = -7$.

$$g'(x) = \frac{-7}{(x-3)^2}$$

Conclusion. $f'(x) = 12x^3 - 10x$ et $g'(x) = \frac{-7}{(x-3)^2}$, qui est négative sur tout l'ensemble de définition : g est décroissante sur chacun de ses intervalles.

Les erreurs à ne pas faire

Dériver un produit en multipliant les dérivées : $(uv)' \neq u'v'$.

Inverser l'ordre au numérateur du quotient : c'est $u'v - uv'$, et le changement d'ordre inverse le signe.

Oublier de dériver l'intérieur d'une composée : $(e^{3x})' = 3e^{3x}$.

Développer le dénominateur $(x-3)^2$: le garder factorisé facilite l'étude du signe.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déploie ensuite.

1. Exercice 1

Dériver $f(x) = x^3 - 4x + 1$ et $g(x) = 5x^2 - \frac{1}{x}$.

Voir le corrigé

$$f'(x) = 3x^2 - 4.$$

$$g'(x) = 10x + \frac{1}{x^2}, \text{ car la dérivée de } -\frac{1}{x} \text{ vaut } +\frac{1}{x^2}.$$

2. Exercice 2

Dériver $h(x) = (2x-1)(x^2+3)$.

Voir le corrigé

$$u = 2x-1, u' = 2 ; v = x^2+3, v' = 2x.$$

$$h'(x) = 2(x^2+3) + (2x-1) \times 2x = 2x^2 + 6 + 4x^2 - 2x = 6x^2 - 2x + 6.$$

3. Exercice 3

Dériver $k(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

Voir le corrigé

$$u = x^2, u' = 2x ; v = x+1, v' = 1.$$

$$k'(x) = \frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}, \text{ soit } \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

Questions fréquentes

Que représente le nombre dérivé ?

$f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe au point d'abscisse a . C'est aussi une vitesse de variation instantanée : en physique, la dérivée de la position par rapport au temps est la vitesse.

Faut-il apprendre les formules par cœur ?

Oui, elles sont utilisées à chaque exercice d'analyse jusqu'en terminale. Le plus rentable est de savoir les reconnaître vite : poser u , u' , v , v' avant d'écrire la formule fait gagner plus de temps que d'essayer de tout faire de tête.