Comment calculer un produit scalaire ?

LA RÉPONSE COURTE

Trois formules, selon les données : avec les **coordonnées**, $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$; avec les **normes et l'angle**, $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\times|\vec{v}|\times\cos\theta$; avec une **projection** quand les vecteurs sont colinéaires à un axe.

La méthode en 5 étapes

1. **Regarder les données**

   Coordonnées connues : première formule. Longueurs et angle : deuxième. Configuration géométrique simple : projection.

2. **Formule des coordonnées**

   $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$: on multiplie les abscisses entre elles, les ordonnées entre elles, et on **additionne**.

3. **Formule avec l'angle**

   $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\theta$ où θ est l'angle **entre les deux vecteurs**, pris avec la même origine.

4. **Interpréter le signe**

   Produit scalaire positif : angle aigu. Négatif : angle obtus. Nul : vecteurs **orthogonaux**.

5. **Vérifier le résultat**

   Le produit scalaire est un **nombre**, jamais un vecteur : une réponse avec une flèche est fausse.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$, puis l'angle entre les deux vecteurs.

Produit scalaire

$\vec{u}\cdot\vec{v}=3\times4+(-2)\times5=12-10=2$.

Les normes

$|\vec{u}|=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$ et $|\vec{v}|=\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$.

Le cosinus

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}=\frac{2}{\sqrt{13}\times\sqrt{41}}=\frac{2}{\sqrt{533}}\approx0{,}0866\,.$$

L'angle

$\theta=\cos^{-1}(0{,}0866)\approx85{,}0[?][?]$.

Conclusion. $\vec{u}\cdot\vec{v}=2$ et l'angle vaut environ $85[?][?]$: il est aigu, ce que confirmait déjà le signe positif du produit scalaire.

Les erreurs à ne pas faire

Multiplier les coordonnées en croix : c'est $xx'+yy'$, pas $xy'-yx'$ (cette dernière expression est le déterminant).

Donner un vecteur en réponse : le produit scalaire est un nombre réel.

Prendre un angle qui n'est pas celui entre les deux vecteurs : ils doivent être ramenés à la même origine.

Oublier le carré dans $\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2$.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. **Exercice 1**

   $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et en déduire la nature de l'angle.

   Voir le corrigé

   $\vec{u}\cdot\vec{v}=2\times(-3)+7\times1=-6+7=1$.

   Le produit scalaire est positif : l'angle est **aigu**.

2. **Exercice 2**

   Deux vecteurs ont pour normes 5 et 8, et l'angle entre eux vaut $60[?][?]$. Calculer leur produit scalaire.

   Voir le corrigé

   $\vec{u}\cdot\vec{v}=5\times8\times\cos(60[?][?])=40\times0{,}5=20$.

3. **Exercice 3**

   $A(1;2)$, $B(4;3)$, $C(2;6)$. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et en déduire si l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu ou obtus.

   Voir le corrigé

   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times1+1\times4=7>0$: l'angle $\widehat{BAC}$ est **aigu**.

Questions fréquentes

À quoi sert le produit scalaire ?

À traiter des questions d'**angles et d'orthogonalité** par le calcul : montrer que deux droites sont perpendiculaires, calculer un angle dans un triangle quelconque, trouver une équation de cercle. C'est l'outil qui relie la géométrie et le calcul algébrique.

Quelle différence avec le déterminant ?

Le produit scalaire $xx'+yy'$ teste l'**orthogonalité** (il s'annule pour des vecteurs perpendiculaires) ; le déterminant $xy'-yx'$ teste la **colinéarité** (il s'annule pour des vecteurs de même direction). Une addition dans un cas, une soustraction dans l'autre.