Comment calculer un PGCD ?

LA RÉPONSE COURTE

Le PGCD est le **plus grand diviseur commun** à deux nombres. La méthode la plus rapide est l'**algorithme d'Euclide** : on divise le grand par le petit, puis le diviseur par le reste, jusqu'à un reste nul. Le PGCD est le **dernier reste non nul**.

La méthode en 5 étapes

1. **Poser la première division**

   On divise le plus grand nombre par le plus petit, et on note le reste.

2. **Recommencer avec diviseur et reste**

   Le diviseur devient le nouveau dividende, le reste devient le nouveau diviseur. On divise de nouveau.

3. **S'arrêter au reste nul**

   Dès qu'un reste vaut 0, l'algorithme est terminé.

4. **Lire le PGCD**

   C'est le **dernier reste non nul**, c'est-à-dire le diviseur de la dernière division.

5. **Interpréter le résultat**

   Si le PGCD vaut 1, les deux nombres sont **premiers entre eux** : aucune simplification n'est possible entre eux.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Calculer le PGCD de 429 et 273 par l'algorithme d'Euclide.

Première division

$429 = 273 \times 1 + 156$. Le reste vaut 156.

Deuxième division

$273 = 156 \times 1 + 117$. Le reste vaut 117.

Troisième division

$156 = 117 \times 1 + 39$. Le reste vaut 39.

Quatrième division

$117 = 39 \times 3 + 0$. Le reste est nul : on s'arrête. Le dernier reste non nul est 39.

Conclusion. $\mathrm{PGCD}(429;273) = 39$. Vérification : $429 = 39 \times 11$ et $273 = 39 \times 7$.

Les erreurs à ne pas faire

Prendre le dernier reste, qui vaut 0 : le PGCD est le dernier reste **non nul**.

Oublier de décaler les nombres : à chaque étape, le diviseur devient dividende et le reste devient diviseur.

Confondre PGCD et PPCM : le PGCD est plus petit que les deux nombres, le PPCM est plus grand.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. **Exercice 1**

   Calculer le PGCD de 84 et 36.

   Voir le corrigé

   $84 = 36 \times 2 + 12$; $36 = 12 \times 3 + 0$.

   Le dernier reste non nul est 12, donc $\text{PGCD}(84;36) = 12$.

2. **Exercice 2**

   Les nombres 105 et 88 sont-ils premiers entre eux ?

   Voir le corrigé

   $105 = 88 \times 1 + 17$; $88 = 17 \times 5 + 3$; $17 = 3 \times 5 + 2$; $3 = 2 \times 1 + 1$; $2 = 1 \times 2 + 0$.

   Le PGCD vaut 1 : ces deux nombres sont bien **premiers entre eux**.

3. **Exercice 3**

   Un fleuriste dispose de 126 roses et 180 tulipes. Il veut composer le plus grand nombre possible de bouquets identiques en utilisant toutes les fleurs. Combien de bouquets, et de quelle composition ?

   Voir le corrigé

   Le nombre de bouquets est le PGCD : $180 = 126 \times 1 + 54$; $126 = 54 \times 2 + 18$; $54 = 18 \times 3 + 0$, donc PGCD $= 18$.

   Il peut faire 18 **bouquets**, contenant chacun $126 \div 18 = 7$ roses et $180 \div 18 = 10$ tulipes.

Questions fréquentes

Peut-on calculer le PGCD autrement ?

Oui, par décomposition en facteurs premiers : on garde les facteurs communs avec leur plus petit exposant. C'est efficace sur de petits nombres, mais l'algorithme d'Euclide reste bien plus rapide dès que les nombres dépassent quelques centaines.

À quoi sert le PGCD dans les problèmes ?

Il répond aux questions de partage équitable maximal : « le plus grand nombre de paquets identiques », « la plus grande longueur de carreaux sans découpe ». Dès qu'un énoncé demande le *plus grand* nombre de parts identiques sans reste, c'est un PGCD.