

Comment calculer la somme des termes d'une suite ?

LA RÉPONSE COURTE

Pour une suite arithmétique : $S = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier} + \text{dernier})}{2}$. Pour une suite géométrique de raison $q \neq 1$: $S = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$.

La méthode en 5 étapes

1. Identifier la nature de la suite

Arithmétique ou géométrique : les deux formules sont totalement différentes.

2. Compter les termes

De u_0 à u_n , il y a $n+1$ termes, pas n . De u_1 à u_n , il y en a n . C'est l'erreur la plus fréquente du chapitre.

3. Repérer le premier et le dernier terme

Pour la formule arithmétique, on a besoin de leurs valeurs ; on les calcule avec le terme général si nécessaire.

4. Appliquer la formule

On remplace, puis on calcule. Pour la formule géométrique, on vérifie d'abord que $q \neq 1$; sinon la somme vaut simplement le nombre de termes multiplié par la valeur commune.

5. Contrôler l'ordre de grandeur

La somme doit se situer entre (nombre de termes $\times$ plus petit terme) et (nombre de termes $\times$ plus grand terme).

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Calculer $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$, puis $T = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{10}$.

Nature de S

Suite arithmétique de raison 1, premier terme 1, dernier terme 100, soit 100 termes.

Calcul de S

$$S = \frac{100 \times (1 + 100)}{2} = \frac{100 \times 101}{2} = 5\,050.$$

Nature de T

Suite géométrique de raison 2, premier terme 1. Les exposants vont de 0 à 10 : il y a 11

termes.

Calcul de T

$$T = 1 \times \frac{1-2^{11}}{1-2} = \frac{1-2048}{-1} = 2\,047.$$

Conclusion. $S = 5\,050$ et $T = 2\,047$.

Les erreurs à ne pas faire

Se tromper d'un terme dans le comptage : de u_0 à u_{10} , il y a **onze** termes.

Appliquer la formule arithmétique à une suite géométrique, ou l'inverse.

Oublier de vérifier $q \neq 1$ avant d'utiliser la formule géométrique.

Utiliser le terme de rang $n+1$ comme dernier terme dans la formule arithmétique.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déploie ensuite.

1. Exercice 1

Calculer la somme des 50 premiers entiers impairs :

$$1+3+5+\dots+99.$$

Voir le corrigé

Suite arithmétique de raison 2, premier terme 1, dernier 99, 50 termes.

$$S = \frac{50 \times (1+99)}{2} = \frac{50 \times 100}{2} = 2\,500.$$

2. Exercice 2

(u_n) est arithmétique de raison 3 avec $u_0 = 4$. Calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{20}$.

Voir le corrigé

$u_{20} = 4 + 20 \times 3 = 64$, et il y a 21 termes.

$$S = \frac{21 \times (4+64)}{2} = \frac{21 \times 68}{2} = 714.$$

3. Exercice 3

Calculer $S = 3 + 3 \times 0,5 + 3 \times 0,5^2 + \dots + 3 \times 0,5^9$.

Voir le corrigé

Suite géométrique de premier terme 3, raison 0,5, avec 10 termes.

$$S = 3 \times \frac{1-0,5^{10}}{1-0,5} = 3 \times \frac{1-0,000977}{0,5} \approx 5,994.$$

Questions fréquentes

D'où vient la formule de la somme arithmétique ?

De l'astuce attribuée au jeune Gauss : on écrit la somme dans un sens puis dans l'autre et on additionne terme à terme. Chaque paire donne (premier + dernier), et il y a autant de paires que de termes. On divise donc par deux le produit obtenu.

Que devient la somme géométrique quand n grandit ?

Si $|q| < 1$, q^n tend vers 0 et la somme se rapproche de $\frac{\text{premier terme}}{1-q}$: elle converge. Si $|q| > 1$, elle croît sans limite. C'est le point de départ des séries géométriques étudiées en terminale.