Comment calculer la distance entre deux points ?

LA RÉPONSE COURTE

Dans un repère orthonormé, $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$. C'est le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle formé par les déplacements horizontal et vertical.

La méthode en 5 étapes

1. **Vérifier que le repère est orthonormé**

   La formule n'est valable que dans un repère orthonormé : axes perpendiculaires et même unité sur les deux.

2. **Calculer les deux écarts**

   x_B-x_A et y_B-y_A, avec des parenthèses pour les coordonnées négatives.

3. **Élever au carré et additionner**

   Les carrés rendent le résultat positif : l'ordre de la soustraction n'a donc aucune importance ici.

4. **Prendre la racine carrée**

   On garde la valeur exacte, simplifiée si possible ($\sqrt{50}=5\sqrt{2}$), avant de donner un arrondi.

5. **Utiliser le résultat**

   Pour déterminer la nature d'un triangle, on calcule les trois distances, puis on compare : deux côtés égaux pour un isocèle, réciproque de Pythagore pour un rectangle.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

$A(-1;2)$, $B(3;5)$ et $C(6;1)$. Calculer AB, BC et AC, puis déterminer la nature du triangle ABC.

AB

$$AB=\sqrt{(3-(-1))^2+(5-2)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5.$$

BC

$$BC=\sqrt{(6-3)^2+(1-5)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$$

AC

$$AC=\sqrt{(6-(-1))^2+(1-2)^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}.$$

Nature

$AB = BC = 5$: le triangle est isocèle en B. De plus $AC^2 = 50$ et $AB^2 + BC^2 = 25 + 25 = 50$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore, il est aussi rectangle en B.

Conclusion. Le triangle ABC est **isocèle rectangle en** B, avec $AB = BC = 5$ et $AC = 5\sqrt{2}$.

Les erreurs à ne pas faire

Oublier un carré, ou la racine carrée finale.

Additionner les écarts au lieu de leurs carrés.

Appliquer la formule dans un repère non orthonormé.

Conclure sur la nature d'un triangle à partir d'un dessin plutôt que des distances calculées.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. **Exercice 1**

   Calculer la distance entre $A(2;-3)$ et $B(-4;5)$.

   Voir le corrigé

   $$AB = \sqrt{(-4-2)^2 + (5-(-3))^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10.$$

2. **Exercice 2**

   $M(0;0)$, $N(4;2)$ et $P(1;5)$. Le triangle MNP est-il isocèle ?

   Voir le corrigé

   $MN = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$; $MP = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$; $NP = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$.

   Les trois longueurs sont différentes : le triangle **n'est pas isocèle**.

3. **Exercice 3**

   Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AB]$ avec $A(-5;3)$ et $B(1;-7)$, puis vérifier que $IA = IB$.

   Voir le corrigé

   $$I\left(\frac{-5+1}{2}; \frac{3+(-7)}{2}\right) = I(-2;-2).$$

   $IA = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$ et $IB = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$: les deux distances sont bien égales.

Questions fréquentes

D'où vient cette formule ?

Du théorème de Pythagore. Les deux points sont les extrémités de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent $|x_B - x_A|$ horizontalement et $|y_B - y_A|$ verticalement. Le carré de l'hypoténuse est la somme des carrés des deux autres côtés.

Faut-il donner la valeur exacte ou approchée ?

La valeur exacte, simplifiée, est toujours préférable : $5\sqrt{2}$ plutôt que $7{,}07$. On ne donne un arrondi que si l'énoncé le demande, et on écrit alors $\approx$ et non $=$. Pour comparer deux longueurs, il vaut mieux comparer leurs carrés, ce qui évite tout arrondi.