

Comment calculer avec la loi binomiale ?

LA RÉPONSE COURTE

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p , alors

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, avec $E(X) = np$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$. Encore faut-il vérifier que l'expérience est bien un schéma de Bernoulli.

La méthode en 5 étapes

1. Vérifier les trois conditions

Une même expérience répétée n fois, de façon **indépendante**, avec seulement deux issues (succès de probabilité p , échec). Un tirage **sans remise** ne convient pas.

2. Identifier n , p et la variable X

On écrit une phrase : « X compte le nombre de succès, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$. »

3. Traduire la question en événement

« Exactement k » : $P(X = k)$. « Au plus k » : $P(X \leq k)$. « Au moins k » : $1 - P(X \leq k-1)$.

4. Calculer

À la calculatrice, avec les fonctions de probabilité binomiale (densité pour $P(X = k)$, cumulée pour $P(X \leq k)$), ou avec la formule.

5. Calculer espérance et écart type

$E(X) = np$ est le nombre moyen de succès sur un grand nombre de répétitions ;
 $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$ mesure la dispersion.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

On lance 10 fois un dé équilibré. Soit X le nombre de 6 obtenus. Calculer $P(X = 2)$, $P(X \geq 1)$ et $E(X)$.

Modélisation

Les lancers sont indépendants, chacun donne « 6 » avec la probabilité $\frac{1}{6}$: X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{6}$.

$P(X = 2)$

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^8 = 45 \times \frac{1}{36} \times \left(\frac{5}{6}\right)^8 \approx 0,291.$$

Au moins un

On passe par l'événement contraire :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 1 - 0,1615 = 0,838.$$

Espérance

$$E(X) = np = 10 \times \frac{1}{6} \approx 1,67.$$

Conclusion. $P(X = 2) \approx 0,291$, $P(X \geq 1) \approx 0,838$, et on obtient en moyenne 1,67 six sur dix lancers.

Les erreurs à ne pas faire

Appliquer la loi binomiale à un tirage sans remise : les épreuves ne sont alors plus indépendantes.

Calculer $P(X \geq 1)$ comme $P(X = 1)$: « au moins un » se calcule avec l'événement contraire.

Confondre $P(X \leq k)$ et $P(X < k)$: pour une variable entière, $P(X < k) = P(X \leq k-1)$.

Oublier l'exposant $n-k$ sur la probabilité d'échec.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déplie ensuite.

1. **Exercice 1**

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,4$. Calculer $P(X = 3)$.

Voir le corrigé

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} 0,4^3 \times 0,6^2 = 10 \times 0,064 \times 0,36 = 0,2304.$$

2. **Exercice 2**

Une machine produit 5 % de pièces défectueuses. On prélève 20 pièces au hasard dans une grande production. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une pièce défectueuse ?

Voir le corrigé

La production étant grande, le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise : X suit la loi binomiale de paramètres 20 et 0,05.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,95^{20} \approx 1 - 0,358 = 0,642.$$

3. **Exercice 3**

Un QCM comporte 20 questions à 4 réponses dont une seule est correcte. Un élève répond au hasard. Quel est son nombre moyen de bonnes réponses, et l'écart type ?

Voir le corrigé

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,25$.

$$E(X) = 20 \times 0,25 = 5 \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{20 \times 0,25 \times 0,75} = \sqrt{3,75} \approx 1,94.$$

Questions fréquentes

Que représente le coefficient binomial ?

$\binom{n}{k}$ compte le nombre de chemins de l'arbre qui réalisent exactement k succès sur n épreuves, autrement dit le nombre de façons de choisir k positions parmi n . C'est lui qui explique pourquoi $P(X = k)$ n'est pas simplement $p^k(1-p)^{n-k}$.

Quand peut-on assimiler un tirage sans remise à une loi binomiale ?

Quand la population est très grande devant l'échantillon, en pratique lorsque l'échantillon représente moins de 10 % de la population. Prélever 20 pièces dans une production de plusieurs milliers ne modifie pas sensiblement les proportions : l'approximation est alors légitime, et les énoncés le précisent.