

Comment calculer avec des racines carrées ?

LA RÉPONSE COURTE

Deux règles seulement : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ et $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$. En revanche, $\sqrt{a+b}$ **ne vaut pas** $\sqrt{a} + \sqrt{b}$: on n'additionne que des racines semblables.

La méthode en 5 étapes

1. Simplifier chaque racine

On cherche le plus grand carré parfait qui divise le nombre : $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$.

2. Regrouper les racines semblables

$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$, comme on regroupe $3x + 5x$. Des racines différentes ne se regroupent pas.

3. Multiplier en séparant nombres et racines

$(3\sqrt{2}) \times (4\sqrt{5}) = 12\sqrt{10}$: on multiplie les coefficients entre eux et les racines entre elles.

4. Développer comme d'habitude

Les identités remarquables s'appliquent, avec $(\sqrt{a})^2 = a$: $(\sqrt{3} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{3} + 1 = 4 + 2\sqrt{3}$.

5. Rendre le dénominateur entier

On multiplie numérateur et dénominateur par la racine : $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Un exemple entièrement résolu

Énoncé

Écrire $A = \sqrt{50} + 3\sqrt{8} - \sqrt{18}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b le plus petit possible.

Simplification de chaque racine

$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$; $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$; $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$.

Réécriture

$A = 5\sqrt{2} + 3 \times 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$.

Regroupement

Toutes les racines sont semblables : $5 + 6 - 3 = 8$.

Résultat

$A = 8\sqrt{2}$.

Conclusion. $A = 8\sqrt{2}$, soit environ 11,31.

Les erreurs à ne pas faire

Écrire $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$: avec $a = b = 4$ on obtiendrait $\sqrt{8} = 4$, ce qui est faux.

Additionner des racines non semblables : $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ne se simplifie pas.

Oublier de simplifier avant de comparer : $\sqrt{50}$ et $5\sqrt{2}$ sont le même nombre.

Écrire $\sqrt{x^2} = x$ sans précaution : c'est vrai seulement si $x \geq 0$.

3 exercices pour s'entraîner

Cherche d'abord sur ton cahier, sans regarder l'exemple ; le corrigé se déploie ensuite.

1. Exercice 1

Simplifier $\sqrt{45}$, $\sqrt{72}$ et $\sqrt{200}$.

Voir le corrigé

$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}.$$

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}.$$

$$\sqrt{200} = \sqrt{100 \times 2} = 10\sqrt{2}.$$

2. Exercice 2

Développer $(2\sqrt{3}-1)^2$.

Voir le corrigé

$$\begin{aligned} (2\sqrt{3})^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times 1 + 1^2 &= 4 \times 3 - 4\sqrt{3} + 1. \\ &= 13 - 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

3. Exercice 3

Écrire $\frac{6}{\sqrt{3}}$ sans racine au dénominateur.

Voir le corrigé

$$\begin{aligned} \text{On multiplie en haut et en bas par } \sqrt{3} : \frac{6\sqrt{3}}{3}. \\ = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Questions fréquentes

Pourquoi éviter une racine au dénominateur ?

C'est une convention d'écriture qui facilite les comparaisons et les calculs à la main : $\frac{\sqrt{2}}{2}$ se situe immédiatement autour de 0,7, là où $\frac{1}{\sqrt{2}}$ demande une division. La forme sans racine au dénominateur est celle attendue dans les corrigés.

Comment savoir si une racine peut se simplifier ?

On cherche un carré parfait parmi ses diviseurs : 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100. Si aucun ne divise le nombre, la racine est déjà sous sa forme la plus simple, comme $\sqrt{15}$ ou $\sqrt{7}$.