SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

PC*2

16 octobre 2003

1. Parmi les propriétés suivantes, quelles sont celles qui sont stables par convergence simple ?

   croissance, convexité, continuité, existence d'une limite en un point

2. (CCP 2001) Soit (u_n) une suite réelle qui converge vers l et (f_n) une suite de fonctions continues qui converge uniformément sur tout segment de $\mathbf{R}$ vers une fonction f. Montrer que $\lim_{n\to\infty} f_n(u_n) = f(l)$.

3. Etudier la convergence simple puis uniforme sur $\mathbf{R}$ de la suite (f_n) de fonctions définie par :

$$\frac{a^n x}{1+na^n x^2} \quad \text{avec } a>0$$

$$\begin{cases} \dfrac{nx^2}{1+nx} & \text{si } x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{nx^3}{1+nx^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$nx\,\mathrm{e}^{-x^2 \ln n}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sin^2 nx}{n \sin x} & \text{si } x \notin \pi\mathbf{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Etudier la convergence simple puis uniforme sur $A \subset \mathbf{R}$ de la suite (f_n) de fonctions définie par :

$$A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \cos^n x \qquad n\cos^n x \sin x$$

$$A = [0, +\infty[\quad \frac{\sin nx}{n\sqrt{x}} \quad \text{si } x \neq 0 \text{ et } f_n \text{ continue}$$

$$A = [0,1] \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{n+k}$$

on pourra étudier la dérivée de $x^n f_n(x)$

$$A = [0, +\infty[\quad \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$A = [0, +\infty[\quad \begin{cases} \cos^n\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi\sqrt{n}}{2} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

5. (Cen 2000) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. On définit la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ par :

$$u_n(x) = \sqrt{f(x)^2 + \frac{1}{n}}$$

   Etudier la convergence simple, uniforme, uniforme sur tout segment, de la suite (u_n).

6. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbf{C}$ par :

$$f_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

   converge uniformément vers e^z sur tout disque fermé de $\mathbf{C}$ centré en 0.

7. Soit (f_n) la suite de fonctions numériques définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$f_0(x) = x \qquad f_{n+1}(x) = 3f_n\left(\frac{x}{3}\right) - 4f_n\left(\frac{x}{3}\right)^3$$

   (a) Etudier la fonction $t \mapsto 3t - 4t^3$ sur $[0,1]$.

   (b) Montrer que, pour $x \in [0,1]$, $0 \leq f_n(x) \leq x$.

   (c) Montrer que (f_n) converge uniformément sur tout segment de $\mathbf{R}$. On pourra déterminer une suite (a_n) telle que, pour tout $x \in [0,1]$:

$$|f_n(x) - \sin x| \leq a_n x^3$$

   La convergence est-elle uniforme sur $\mathbf{R}$?

8. (CCP 2001) Soit (f_n) une suite de fonctions telle que :
   – $f_0 \geq 0$ et bornée sur $\mathbf{R}$.
   – $f_{n+1} = \sqrt{1+f_n}$.
   Étudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n) sur $\mathbf{R}$.
9. Soit (P_n) la suite de fonctions polynômiales définies sur $[0,1]$ par :
$$P_0(x) = 0, \qquad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n^2(x))$$
   Etudier la convergence simple puis uniforme de (P_n) sur $[0,1]$.
10. (TPE 2001) Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par :
$$f_n(x) = \sin x + x\,\mathrm{e}^{-nx}$$
   (a) Convergence simple, uniforme sur $[0,+\infty[$?
   (b) Soit f la limite simple de la suite (f_n). Étudier la série de fonctions terme général $f_n - f$. Calculer sa somme.
11. (Mines 98) Domaine de définition, continuité, dérivabilité de :
$$\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$
12. (TPE 98) Soit $a > 0$, on pose $I(a) = \int_1^a \mathrm{e}^x \ln(x)\mathrm{d}x$. Ecrire $I(a)$ comme somme d'une série et calculer $I(2)$ à 10^{-1} près.
13. Pour $x > 0$, on pose : $u_n(x) = \dfrac{1}{n+n^2x}$.
   – Convergence de la série de fonction $\sum_{n\geq 0} u_n$? Soit S sa somme.
   – Continuité, variations ?
   – Equivalent de la somme en $+\infty$?
   – Calculer $S(1/p)$
14. (Centrale 99) Pour $|x| < 1$ et $n \geq 1$ on pose :
$$u_n(x) = \frac{x}{n(1-nx^2)}$$
   (a) Convergence simple et uniforme de $\sum_{n\geq 1} u_n$ sur $]-1,1[$?
   (b) Dérivabilité de $\sum_{n\geq 1} u_n$?
   (c) Dérivabilité en 0 ?

15. (Cen 2000) On se place sur $I =]1,+\infty[$. Etude des différents modes de convergence et de la continuité de la somme de
$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+x^n}$$
16. (Mines 2000) Equivalent de $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$ au voisinage de 1_+.
17. (CCP 99, Mines 2000, Cen 2001, X 2001) Montrer l'égalité :
$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$$
   et en trouver une valeur approchée à 10^{-6} près.
18. (Centrale 2001) Pour $n \geq 1$, on pose :
$$J_n = \int_0^1 \frac{t^n \ln t}{1+t}\,\mathrm{d}t$$
   (a) Trouver $\lim_{n\to\infty} J_n$.
   (b) Trouver une relation entre J_n et J_{n+1}.
   (c) Trouver un équivalent simple de la suite (J_n).
19. On pose, pour $x > 0$:
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} nx}$$
   Continuité et comportement de f au voisinage de 0^+.
20. (Mines 2002) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$$
   est continue sur $\mathbf{R}$ mais non dérivable en 0.
21. (Centrale 2001)
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th}(nx)}{n^2}$$
   (a) Définition et continuité ?

(b) f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$?
(c) Limite de f en $+\infty$?

22. (CCP 2000) Etudier :
$$\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(x^2)}{\operatorname{ch} nx}$$
23. (CCP 2000) Etudier :
$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)$$
24. Convergence simple, uniforme, continuité de la somme, limites aux bornes de la série de fonctions définie sur $]0,+\infty[$ par :
$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$$
25. (Cen 98) Domaine de définition D de :
$$\sum_{n\geq 0} \ln(1+x^{2n})$$
Convergence uniforme sur D ? Continuité de la somme sur D ? Equivalents aux bornes de D ?
26. Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \dfrac{x}{n(1+n^2x)}$. Existence de $\sum_{n\geq 0} u_n$, continuité et dérivabilité de la somme sur $[0,+\infty[$.
27. Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \dfrac{1}{n(n+x)}$. Existence de $\sum_{n\geq 1} u_n$, équivalent en $+\infty$.
28. (CCP 97 98 et Cen 2000 2001 2002) Définition, continuité, calcul de la somme de :
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \,\mathrm{e}^{-nx}}{n}$$
29. (Mines 98 et 99) Convergence simple et uniforme sur $[-1,1]$ de la suite (f_n) de fonctions définie par :
$$f_n(x) = (\sin nx)\,\mathrm{e}^{-nx^2}$$
puis :
$$f_n(x) = (\sin nx)\,\mathrm{e}^{-nx^\alpha}, \qquad \alpha > 0$$

30. (Mines 98) α, β, γ sont des réels > 0.
$$f_n(x) = n^\alpha x^\beta (1-x)^{n\gamma}$$
Condition nécessaire et suffisante pour que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0,1[$? En utilisant la suite $\sum_{n=k}^{2k} f_n$, prouver que, si cette condition n'est pas réalisée, il n'y a pas convergence uniforme.
31. (CCP 98) On considère la suite (f_n) de fonctions de $[0,+\infty[$ dans $\mathbf{R}$ définie par :
$$f_0(x) = x \qquad f_{n+1}(x) = \frac{x}{2+f_n(x)}$$
Trouver la limite simple de la suite (f_n) et étudier s'il y a convergence uniforme ou convergence uniforme sur tout segment.
32. (Centrale 99) Soit $\alpha > 0$ et, pour $x > 0$ et $n \geq 1$:
$$f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{\alpha}{n^2\,x^2}\right)$$
Convergence de $\sum_{n\geq 1} f_n$? Continuité de la somme ? Equivalent de la somme en 0 ?
33. (CCP 99) Convergence simple et uniforme sur $\mathbf{R}$ de la suite de fonctions de terme général $x \mapsto nx\,\mathrm{e}^{-x^2 \ln n}$
34. (CCP 99) Convergence simple et uniforme sur $\mathbf{R}$ de la serie de fonctions de terme général $x \mapsto \frac{nx}{n^4+x^2}$.
35. (Centrale 98) $f_n(x) = n\cos^n x \sin nx$. Convergence simple et uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
36. (Centrale 98 et 2002) $f_n(x) = n\cos^n x \sin x$. Convergence simple et uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Comparer :
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$
37. (Centrale 2002) $f_n(x) = n\,x\,\mathrm{e}^{-n\,x} \sin x$. Convergence simple et uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et sur $[0,\pi]$.
38. (Centrale 99) Etudier la suite de fonctions (f_n) définie sur $[0,+\infty[$ par :
$$f_0 = 1 \qquad f_{n+1}(x) = 2\int_0^x \sqrt{f_n(t)}\,\mathrm{d}t$$

39. (CCP 98) Etudier la convergence simple et uniforme sur $[0,1]$ de la suite (f_n) de fonctions définie par :

$$f_n(x) = 4^n \left[x^{(2^n)} - x^{(2^{n+1})}\right]$$

40. Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ continue. $f_n(x) = (1-x)^n f(x)$.
   (a) Montrer que (f_n) converge uniformément si et seulement si $f(0) = 0$.
   (b)

$$\begin{cases} u_n(x) = \dfrac{-x(1-x)^{n+2}}{\ln x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ u_n(0) = u_n(1) = 0 \end{cases}$$

   Convergence de $\sum_{n\geq 0} u_n$. Montrer que la convergence est uniforme mais pas normale.
41. $u_n(x) = n^2 x^\alpha \, \mathrm{e}^{-nx^2}$. $\alpha > 0$. Domaine de convergence simple, uniforme de $\sum_{n\geq 0} u_n$? Domaine de continuité, de dérivabilité de la somme ? Etudier la continuité et la dérivabilité en 0.
42. $u_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}$ pour $x, n > 0$. Etudier la convergence de $\sum_{n\geq 1} u_n$, la continuité et la convexité de la somme.
43. $f : \mathbf{R}_+ \mapsto \mathbf{R}_+$ décroissante et continue. $u_n(x) = f(n) - f(n+x)$. Etudier la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$.
44. $u_n(x) = \dfrac{\sqrt{x}\ln n}{1 + xn^2}$. Etudier $\sum_{n\geq 1} u_n$. Continuité ? Equivalent en $+\infty$. Comportement en 0.
45. (Mines 97, Cen 2003) Décomposer en éléments simples la fraction :

$$\frac{1}{X(X+1)\dots(X+n)}$$

   Prouver l'existence d'une suite (a_n) de réels telle que :

$$\forall x > 0,\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(x+n)}$$

46. (X 2001)

   (a) Prouver l'existence, pour $z \in \mathbf{C}$ de :

$$\phi(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{2^n}\right)$$

   (b) Continuité de ϕ sur $\mathbf{R}$? sur $\mathbf{C}$?
   (c) Relation entre $\phi(z)$ et $\phi\left(\frac{z}{2}\right)$?
47. (Mines 99) Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}$$

   (Mines 97) : Calculer sa somme.
48. (Mines) Convergence et limite éventuelle de :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^\alpha}} \qquad \alpha > 0$$

49. Convergence simple et uniforme sur $[0, +\infty[$ de : $\sum_{n\geq 0} \dfrac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)}$. Calculer la somme. Etudier la série des dérivées.
50. $\alpha > 1$. Pour $x \geq 0$, on pose :

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\ln(1+nx)}{n^\alpha}$$

   Equivalent de f au voisinage de 0 ?
51. (Centrale 2001) Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose :

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

   (a) Définition de a_n et convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n$?
   (b) En considérant $\int_0^1 t^{k-1} \ln t \, \mathrm{d}t$, évaluer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

52. (X) Montrer que :

$$\forall x \geq 0, \quad \left| \mathrm{e}^{-x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Montrer que :

$$\varphi_n(x) = \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$$

est le terme général d'une suite de fonctions qui converge uniformément vers 0 sur $\mathbf{R}_+$.
En déduire, par récurrence, que $\forall p \in \mathbf{N}^*$, il existe une suite (P_n) d'éléments de $\mathbf{R}[X]$ telle que la suite $(\mathrm{e}^{-2x} P_n(x))$ converge uniformément vers e^{-2px} sur $\mathbf{R}_+$.

53. (Centrale 98) Soit f une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, telle que :

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ |f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq M$$

(a) Que dire si $M = 0$.

(b) Si $M \neq 0$, montrer que la suite de fonctions de terme général

$$x \mapsto 2^{-n} f(2^n x)$$

Converge vers une application linéaire g qui est l'unique application linéaire telle que $f - g$ soit bornée.

54. (Centrale 97 et 2000) Convergence simple et uniforme sur $\mathbf{R}_+$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ avec :

$$f_n = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } n\pi \leq x \leq (n+1)\pi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

55. (Centrale 2001) Soit f_n la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$x \mapsto \frac{n\,x}{1 + n^2\,x^2}$$

On considère la série de terme général :

$$\frac{1}{2^p}\, f_p\left(x - \mathrm{e}^{-p}\right)$$

Étudier la convergence de cette série (*ie* convergence simple, normale).

56. (X 2001 et 2002) On pose $f_n(x) = \frac{n^2\,x^2}{1+(nx)^4}$ et (a_p) une suite de réels quelconques.

(a) Définition de

$$g_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} f_n(x - a_p)\, 2^{-p}\ ?$$

(b) Convergence simple de la suite (g_n).

(c) Soit (a_p) une suite de rationnels tels que :

$$\{a_p,\ p \in \mathbf{N}\} = \mathbf{Q}$$

Convergence uniforme de (g_n) sur un segment de $\mathbf{R}$?

57. (X 2001) Trouver un équivalent quand $t \to 1_-$ de :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{1 - t^n}$$

58. (ESIM 97) Définition et continuité de :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\sqrt{n}\, x)$$

Trouver un équivalent de f en 0.

59. (Mines 97) $f_n(x) = \sin x \cos^n x$.

(a) Etude de la suite (f_n) sur $\mathbf{R}$.

(b) Equivalent de $||f_n||_\infty$ au voisinage de l'infini.

(c) Etude de la série de fonctions de terme général f_n.

60. (Centrale 97) Trouver les fonctions f continues sur $]-1, +\infty[$ et vérifiant :

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{(x+1)(x+2)}$$

61. (X97 et ENS 2000) n, a, b sont des naturels avec $b > 0$. On pose :

$$P_n(x) = \frac{x^n (bx - a)^n}{n!}$$

(a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(a/b)$ sont des entiers.

(b) Prouver que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi P_n(x) \sin x \,\mathrm{d}x = 0$$

(c) Montrer que, si l'on avait $\pi = a/b$, I_n serait un entier, à partir d'un certain rang ; relever une contradiction et conclure.
NDLR : Preuve, on ne peut plus rebattue, de l'irrationnalité de π.

62. (X98 Centrale 2002) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$, bornée. Etudier la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$f_n(x) = \int_{-n}^{n} f(x-t)\phi_n(t)\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad \phi_n(t) = \frac{n}{\pi(1+n^2t^2)}$$

63. Etude de la suite de fonctions (f_n) définie sur $[-1,1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{\int_0^x (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t}{\int_{-1}^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t}$$

64. (Cen 2000) On pose :

$$\theta_n(t) = \begin{cases} (1-t^2)^n & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad I_n = \int_{-1}^1 \theta_n(t)\,\mathrm{d}t, \quad \phi_n(t) = \frac{\theta_n(t)}{I_n}$$

Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-1/2, 1/2]$ et nulle à l'extérieur de ce segment. On pose :

$$f_n(x) = \int_{-1}^1 f(x-t)\phi_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[-1,1]$. Qu'en conclure ?