TD SÉRIES ET RÉVISIONS SUR LES SUITES NUMÉRIQUES

PC*2

1 septembre 2003

1. Trouver un développement asymptotique à deux termes de :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$$

2. (CCP 2002) Étudier la suite de terme général :

$$u_n = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \cdots + \frac{1}{n\ln n} - \ln(\ln n)$$

3. Nature des séries :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(\ln n)^n}{n!} \quad \text{(CCP 99)}$$

$$\sum_{n\geq 2} \left(1 - \frac{1}{\ln n}\right)^{\sqrt{n}} \quad \text{(CCP 99)}$$

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n}\right)^{1+1/n}$$

$$\sum_{n\geq 1} \operatorname{Arccos}\left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \alpha > 0 \quad \text{(CCP 99)}$$

$$\sum_{n\geq 2} \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} \quad \text{(CCP 99)}$$

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} - \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\sum_{n\geq 1} e^{a\,n}\left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n^3} \quad \text{(CCP 2001)}$$

$$\sum_{n\geq 0} \operatorname{Arccos} \frac{n^3+3n+1}{n^3+2n^2+2}$$

$$\sum_{n\geq 1} \pi/6 - \arcsin\left(1/2 + n^{-2}\right)$$

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n^{3/4} + \cos n} \quad \text{(Mines 99)}$$

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n n^{1/n}}{\ln n} \quad \text{(CCP 98)}$$

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}} \quad \text{(Mines 2002)}$$

$$\sum_{n\geq 2} \cos\left[\pi n^2 \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right] \quad \text{(TPE 99)}$$

$$\sum_{n\geq 1} \cos\left(\arctan n + n^{-\alpha}\right),\ \alpha > 0 \quad \text{TPE 2003}$$

$$\sum_{n\geq 1} \operatorname{Arccos}\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \sqrt{\frac{2}{n}} \quad \text{(Centrale 2001)}$$

$$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbf{R} \quad \text{(CCP 2001)}$$

4. (CCP 2001) Convergence des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n+(-1)^{n+1}}$?
5. Nature de la série de terme général $\frac{|\sin n|}{n}$?
6. (Mines 2001) Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1 - 6\sqrt{x} + x \arctan x}{x^2}$$

(a) Montrer qu'existe $a > 0$ à partir duquel f décroît.

(b) La série de terme général $f(n)$ converge-t-elle ?

(c) La série de terme général $(-1)^n f(n)$ converge-t-elle ?

7. (CCP 2003) $a > 0$, $s > 0$. Discuter, suivant a et s la nature de la série de terme général a^{u_n} avec :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$$

8. (Centrale 2001) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt[n]{n!}}$?

9. (Centrale 2001) Étudier la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ avec :

$$u_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n^\alpha} \qquad (\alpha \in \mathbf{R})$$

10. (Centrale 2001) Étudier la série de terme général :

$$\sqrt{\ln\left(n^2+1\right)} - \sqrt{\ln\left(n^2+\frac{1}{2}\right)}$$

11. (Centrale 2001) Convergence et somme de la série

$$\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) ?$$

12. (Centrale 98) Nature de la série de terme général :

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+2}\right)$$

13. (Centrale 98) Nature de la série de terme général :

$$\mathrm{Arccos}\left(\frac{2}{\pi}\arctan(n^2)\right)$$

14. (Centrale 99) Nature de la série de terme général R_n où :

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

15. (Centrale 2003) Soit (z_n) une suite complexe telle que les séries $\sum_{n\geq 0} z_n$ et $\sum_{n\geq 0} z_n^2$ convergent.On suppose que, pour tout n, $\mathrm{Re}(z_n) \geq 0$. Montrer que $\sum_{n\geq 0} |z_n|^2$ converge mais pas forcément $\sum_{n\geq 0} |z_n|$.

16. (ESPCI 2001) Soit (a_n) une suite de réels positifs telle que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge. Qu'en est-il des séries :

$$\sum_{n\geq 0} a_n^2, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{1+a_n}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{1+na_n}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{1+n^2a_n} ?$$

17. (Centrale 99) Soit (u_n) une suite de réels positifs, montrer que les séries de terme généraux

$$u_n, \quad \frac{u_n}{1+u_n}, \quad \ln(1+u_n), \quad \int_0^{u_n} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

sont de même nature.

18. (Mines 98) Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. Prouver que $\sum_{n\geq 0} \sqrt{u_n u_{n+1}}$ converge.

19. (CCP 98) $a > 0$, $b > 0$. p_n désigne le nombre de chiffres de n. Convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a^n b^{p_n}$?

20. (CCP 98) Nature des séries de terme général :

$$\sin\left[(2-\sqrt{3})^n\pi\right] \qquad \sin\left[(2+\sqrt{3})^n\pi\right]$$

21. (Mines 98) soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$. On définit une suite (M_n) de points de $\mathcal{P}$ par :
   - $M_1 \in \mathcal{P}$.
   - M_{n+1} est le deuxième point d'intersection de $\mathcal{P}$ et de sa normale au point M_n.

   Notons y_n l'ordonnée de M_n, étudier la série $\sum_{n\geq 1} 1/y_n$.

22. $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

(a) Calculer $[A_{10^{2p}}]$.

(b) Donner un équivalent simple t_n de A_n puis un équivalent de $A_n - t_n$.

23. (Mines 2002) On considère la suite de terme général :

$$x_n = \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^{n} k^k$$

Touver sa limite l et un équivalent de $x_n - l$.

24. (CCP 2000) Trouver la limite de :

$$\sqrt[n]{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}}$$

25. (Centrale 98) Convergence et somme de :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}$$

26. Etudier la suite :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^5} \end{cases}$$

Equivalent de u_n.

27. (X98) Soit :

$$S(n) = n^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} k^{-1/2}$$

Limite l de $S(n)$ et équivalent de $S(n) - l$?

28. Soit (u_n) une suite positive, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, étudier la série $\sum_{n\geq 0} u_n \,\mathrm{e}^{-S_n}$.

29. déterminer :

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \dots \frac{1}{n^2}$$

30. (Mines 98) Soit f une bijection de $\mathbf{R}^+$ sur lui même, de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et telle que $f(1) = 1$. Prouver que les séries $\sum_{n\geq 1} 1/f(n)$ et $\sum_{n\geq 1} f^{-1}(n)/n^2$ sont de même nature.

31. (Mines 96) Soient α, β, γ strictement poitifs. Étudier la convergence de $\sum_{n\geq 1} u_n$ avec :

$$u_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha+i) \prod_{i=0}^{n-1}(\beta+i)}{\prod_{i=0}^{2n-1}(\gamma+i)}$$

32. Soit $u_{n+1} = u_n\sqrt{1+u_n}$. Prouver l'existence de $k > 0$ telle que :

$$u_n \sim k^{(3/2)^n}$$

33. $u_{n+1} = u_n + n\ln(1+u_n)$, $u_0 > 0$. Prouver que $n^2 = O(u_n)$. En déduire $u_{n+1} \sim u_n$ puis déterminer un équivalent de u_n.

34. (X 2000) $u_0 > 0$, (a_n) est une suite positive à laquelle on associe la suite (u_n) définie par u_0 et la récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$$

Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge. Traiter une question analogue avec la suite (v_n) doublement récurrente définie par :

$$v_0 > 0, v_1 > 0, \quad v_{n+2} = a_n v_{n+1} + v_n$$

35. (X) Soit (x_n) une suite de réels ≥ 1. Prouver que la suite de terme général :

$$u_n = \sqrt{1 + x_1\sqrt{1 + x_2\sqrt{1 + \dots + x_{n-1}\sqrt{1+x_n}}}}$$

converge si et seulement si la série :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(x_n)}{2^n}$$

converge.

36. Convergence et somme de $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{n}$.

37. (CCP 99) Soit (a_n) une suite réelle telle que, pour tout entier naturel n, $0 < a_n < 1$. On définit une suite (b_n) par $b_0 \geq 0$ et

$$\forall n \geq 1,\ b_n = \frac{b_{n-1} + a_n}{1 + a_n b_{n-1}}$$

(a) Montrer que (b_n) possède une limite L.
(b) Montrer que si $0 \leq b_0 \leq 1$, alors $0 < L \leq 1$.
(c) Montrer que si (a_n) possède une limite non nulle alors $L = 1$.
(d) On suppose $b_0 > 1$. Prouver que $L = 1$ si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge.

38. (X) Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{S_n^\alpha}$$

Où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

39. Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et

$$u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\sqrt{u_n}$$

40. (X) Prouver l'inégalité :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2} < \mathrm{e}^{-n}$$

41. (Mines 2003) soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite strictement positive et bornée. On pose $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Étudier la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$b_n = \frac{\frac{a_1}{A_1} + \cdots + \frac{a_n}{A_n}}{\ln An}$$

42. (X 2003) Soit (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence :

$$u_n = u_{n-1} + \mathrm{e}^{-u_{n-1}}$$

(a) Étude de (u_n).
(b) Équivalent de (u_n) ?
(c) Équivalent de $(u_n - \ln n)$

43. (X) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite positive telle qu'il existe une suite (n_k), strictement croissante, de naturels pour laquelle :

$$\forall k,\ u_{n_k} \geq \frac{1}{n_k}$$

Prouver la divergence de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

44. Déterminer :

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right)\right) - n\right]$$

45. Prouver l'existence de $a > 0$ tel que la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et :

$$u_{n+1} = u_n^{\exp(u_n)}$$

converge vers 0 pour $0 < u_0 \leq a$. Dans ces conditions déterminer un équivalent de (u_n).

46. Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + n u_n^2}$$

Déterminer un équivalent de (u_n).

47. Soit x_n la plus grande racine réelle de l'équation :

$$x^{2n} - 2nx + 1 = 0$$

Nature de la série $\sum_{n\geq 2} (x_n - 1)^\alpha$.

48. Etudier le comportement asymptotique des suite (a_n) et (b_n) définies par $a_0 > 0$, $b_0 > 0$ et les relations :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \\ \frac{2}{b_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \end{cases}$$

Si (a_n) converge vers λ, trouver un équivalent de $a_n - \lambda$.

49. Soit λ_n la plus petite racine >0 de P_n' où $P_n = \prod_{i=0}^{n}(X-i)$. Prouver $\lim \lambda_n = 0$ puis que :
$$\lambda_n = \frac{a}{\ln(n)} + \frac{b}{\ln(n)^2} + o\left(\frac{1}{\ln(n)^2}\right)$$
50. Nature de la série de terme général $(\prod_{k=0}^{n} C_n^k)^{\frac{1}{n^2}}$.
51. Soit (a_n) une suite réelle strictement positive telle que $\sum_{n\geq 1} a_n \ln(n)$ converge. Prouver la convergence de
$$\sum_{n\geq 1} a_n \ln\left(\frac{1}{a_n}\right)$$
52. (CCP 99) Soit (a_n) le terme général positif d'une série convergente. Que dire de la série de terme général $a_n^{1-1/n}$?
53. (a) Prouver, pour $a_1 \dots a_n \geq 0$, l'inégalité :
$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$
    (b) Prouver l'inégalité :
$$\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n!$$
    Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs tels que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge. Prouver l'inégalité (de Carleman)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{u_1 \dots u_n} \leq \mathrm{e} \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$
54. Soit $\alpha > 0$ et $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite > 0. Les séries $\sum_{n\geq 1} a_n$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha a_n}$ peuvent-elles converger simultanément ?
55. (TPE 97) Etudier la série de terme général :
$$\ln\left(\tan\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)\right)$$

56. (Centrale 97) $a, b, c > 0$. déterminer la limite de :
$$u_n = \left[\frac{a^{1/n} + b^{1/n} + c^{1/n}}{3}\right]^n$$
57. (CCP 97) Etudier la suite :
$$u_{n+1} = \frac{1 + u_n^2}{2}$$
Equivalent de u_n quand $n \to \infty$.
58. (CCP 97) Déterminer la limite de la suite :
$$S_n = \left(\frac{(2n)!}{n! n^n}\right)^{1/n}$$
59. (CCP 97) Somme de la série $\sum_{n\geq 1} \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)$
60. (CCP 97) Déterminer :
$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$
61. (Mines 97) Etudier la suite (x_n) définie par :
$$x_0 \neq 0, \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)$$
62. (X 2003) développement asymptotique de :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+n^2}$$
63. (Centrale 97 et 99) Soit (u_n) une suite réelle telle que, pour tout n, $u_n \neq -1$. On pose :
$$v_n = \frac{u_n}{(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_n)}$$
    (a) On suppose $u_n \geq 0$, pour tout n. Convergence de $\sum_{n\geq 0} v_n$?

(b) On suppose $\sum_{n\geq 0}|u_n|<+\infty$, en est-il de même de $\sum_{n\geq 0}|v_n|$?

(c) On suppose $\sum_{n\geq 0}u_n$ converge, en est-il de même de $\sum_{n\geq 0}|v_n|$?

64. (Centrale 97) On suppose $\lim u_n=u$, qu'en est-il de la suite :

$$v_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k u_k \quad ?$$

65. (Centrale 97) Soit :

$$u_n=\sqrt{n}+\alpha\sqrt{n+1}+\beta\sqrt{n+2}$$

Déterminer $(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2$ de sorte que $\sum_{n\geq 0}u_n$ converge. Déterminer alors la somme de la série.

66. (CCP 2003) Convergence et somme de la série de terme général :

$$u_n=\frac{1}{\mathrm{ch}(n)\,\mathrm{ch}(n+1)}$$

67. (X97) Soit (a_n) une suite à termes réels >0. Etudier la série de terme général :

$$\frac{a_n}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}$$

68. (X98 et X99) Soit (u_n) une suite strictement positive telle que $\sum_{n\geq 0}u_n$ converge. Etudier les séries :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{u_n}{\sqrt{n}}\qquad\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{u_n}}{n}$$

Soit (u_n) une suite positive telle que $\sum_{n\geq 0}u_n$ diverge. Etudier la nature de :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{u_n}{S_n}$$

69. (X98) Soit (a_n) une suite positive décroissante telle que $\sum_{n\geq 0}a_n$ converge. Prouver que $na_n\to 0$.

70. (Centrale 97) Conditions sur $P\in\mathbf{R}[X]$ pour que la série de terme général :

$$u_n=(n^4+3n^2)^{1/4}-[P(n)]^{1/3}$$

Converge.

71. (Mines 97) Condition sur $\alpha\in\mathbf{R}$ pour que la série :

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{(\ln 2)^\alpha+\cdots+(\ln n)^\alpha}$$

soit convergente.

72. (X97) Nature de la série de terme général :

$$\sin(\pi\sqrt{n^2-1})$$

73. (Centrale 97)

$$f(x)=\cos x+17\sin x+x^3+x^2-5x-1$$

Etudier les séries de terme généraux :

$$u_n=\frac{1}{f(n)^\alpha},\quad v_n=(-1)^n u_n$$

74. (Centrale 97)

(a) Soit f continue sur $\mathbf{R}_+$ telle que :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x+1)-f(x)=0$$

Etudier la limite, quand $x\to+\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$

(b) Convergence et somme de la série de terme général u_n avec :

$$u_n=\frac{1}{n}\left([(\sqrt{n+1}]-[(\sqrt{n}]\right)$$

75. (Centrale 97)

(a) Montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme P_n tel que, pour tout réel θ où les deux membres sont définis, on ait :

$$\sin((2n+1)\theta)=(\sin\theta)^{2n+1}P_n\left(\mathrm{cotg}^2\,\theta\right)$$

(b) Expliciter P_n

(c) Calculer ses racines.

(d) Prouver que :

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotg}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$$

(e) Prouver, pour $0 < t < \frac{pi}{2}$, la relation :

$$\operatorname{cotg}^2 t \leq \frac{1}{t^2} \leq 1 + \operatorname{cotg}^2 t$$

(f) Convergence et somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

76. (X97 et 2001) Soit $\sum_{n\geq 1} u_n$ une série convergente à termes positifs, S sa somme. On pose :

$$\begin{cases} v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \\ w_n = \frac{u_1+2u_2+\cdots+nu_n}{n(n+1)} \\ x_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} u_k} \end{cases}$$

Nature de $\sum_{n\geq 1} v_n$ et de $\sum_{n\geq 1} w_n$? Montrer que $\sum_{n\geq 1} x_n$ converge. *Indication de l'examinateur : Prouver l'existence d'une constante universelle K telle que $x_n \leq K w_n$*

77. (X97) Soit $a > 0$ et (x_n) la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} x_0 > 0 \\ x_{n+1} = x_n(x_n^2 - 3ax_n + 3a^2) \end{cases}$$

Etudier, suivant les valeurs de x_0, la convergence éventuelle de (x_n) et, le cas échéant, la vitesse de convergence.

78. (X97)

$$u_0 \in]0, \pi/2[, \qquad u_{n+1} = \sin u_n$$

Montrer que $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ diverge et que $\sum_{n\geq 0} u_n^3$ converge.

79. (X97) Convergence et somme de :

$$\sum_{n\geq 3} \frac{4n-3}{n(n^2-4)}$$

80. (X97) $\alpha \in \mathbf{R}$.

$$f_\alpha : x \mapsto \ln x - \alpha + \mathrm{e}^{\alpha - x}$$

(a) Combien de zéros possède f_α ?

(b) Donner l'ensemble des couples (a, b) tels que :

$$a = \exp(-\,\mathrm{e}^{\alpha}\, b), \quad \text{et} \quad b = \exp(-\,\mathrm{e}^{\alpha}\, a)$$

(c) Etudier la suite :

$$u_{n+1} = \exp(-\,\mathrm{e}^{\alpha}\, u_n)$$

81. (Centrale 97)

$$u_n = \frac{\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{n}$$

Convergence de $\sum_{n\geq 1} u_n$ et de $\sum_{n\geq 1} \sin(u_n)$?

82. (Mines 97) $\alpha > 1$, $0 < \beta \leq 1$.

$$R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \quad S_n(\beta) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\beta}$$

Nature de la série de terme général $U_n(\alpha, \beta) = \frac{R_n(\alpha)}{S_n(\beta)}$ et de la série de terme général $(-1)^n U_n(\alpha, \beta)$.

83. (Mines 99) Soit (a_n) une suite strictement positive décroissante telle que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ soit convergente de somme S. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :
– Pour tout n, $a_n \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$.
– Pour tout $t \in]0, S]$ il existe une application strictement croissante $\phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\phi(n)} = t$

[NDLR : Il semble qu'on n'ait posé que la première implication]. Quel est l'ensemble des réels x qui peuvent s'écrire sous la forme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{n^2}$ avec $\epsilon_n \in \{0, 1\}$ pour tout n ?

84. (Mines 99) Soit (x_n) une suite réelle et $(y_n)_{n\geq 1}$, la suite définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\sqrt{k}}$$

Prouver que la convergence de la suite (x_n) entraine celle de la suite (y_n).

85. (X99) Soit (c_n) une suite complexe telle que la suite (nc_n) soit bornée. On pose :

$$A = \sup |c_n| \qquad B = \sup n|c_n|$$

(a) Prouver l'inégalité :

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{k+2}{(k+1)^2}$$

(b) Montrer que $\sum_{n=k+1}^{\infty} |c_n|^2 \leq 2AB$ *[Indication : Couper la somme en deux par un indice proche de B/A].*

86. (X99) Soit (a_n) une suite complexe. On définit une application ϕ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$ par :

$$\phi(\lambda) = \text{Card}\,\{n \,/\, |a_n| > \lambda\}$$

(a) Montrer que $a_n \to 0$ si et seulement si $\phi(\lambda)$ est fini pour tout $\lambda > 0$.

(b) Montrer que s'il existe $p \geq 1$ tel que la série $\sum_{n\geq 0} |a_n|^p$ converge alors la fonction $\lambda \mapsto \lambda^p \phi(\lambda)$ est bornée sur $]0, +\infty[$. Réciproque ?

(c) Montrer que si la fonction $\lambda \mapsto \lambda^p \phi(\lambda)$ est bornée sur $]0, +\infty[$, alors pour tout $q > p$ la série $\sum_{n\geq 0} |a_n|^q$ converge. On remarquera que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^q = \int_0^{+\infty} q\lambda^{q-1}\phi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

87. (ESPCI 2001)

(a) On suppose que l'ensemble des entiers naturels composés des seuls facteurs premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13 est rangé en une suite croissante $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$.

i. Que dire de la série $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{n_k}$?

ii. Si elle converge, calculer sa somme.

(b) Soit P un ensemble infini de nombre premiers tel que $\sum_{p\in P} \frac{1}{p}$ converge (on donnera un sens à cette assertion). Soit $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite d'entiers naturels distincts composés exclusivement de facteurs premiers appartenant à P. Étudier la convergence de $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{n_k}$.

88. (X99) Soit (s_n) une suite réelle et, pour $n \geq 1$:

$$v_n = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n}$$

(a) Etudier l'équivalence entre la convergence de (s_n) et celle de (v_n). Que dire si (s_n) croît ?

(b) On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = s_n - s_{n-1}$. On suppose que $u_n = O(1/n)$ et que $v_n \to 0$ quand $n \to \infty$. Montrer que $s_n \to 0$. *[Pour $q > p$ on pourra exprimer $(q-p)s_q$ en fonction de qv_q, pv_p, $u_{p+2}, \ldots, u_q$]*