TD Séries entières

PC*2

13 janvier 2004

1. (CCP 2000) Soit $a > 0$. Rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a^n\, z^{n!}$?
2. (Esim 2001) Trouver le rayon de convergence de :
$$\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^n\; x^{n^2}$$
3. (Mines 2001) Soit (a_n) une suite réelle strictement positive telle que :
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{a_{n-1}\,a_{n+1}} = l \neq 1$$
Étudier le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ suivant l.
4. (1996) Si $\sum_{n\geq 1} a_n\, x^n$ est une série entière de rayon de convergence R. Que dire du rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} a_n n^\alpha\, x^n$?
5. (CCP 1998) $a_n \neq 0$ pour tout entier naturel n. Comparer les rayons de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et de $\sum_{n\geq 0} (1/a_n)\, z^n$.
6. (X 1998) Rayon de convergence de la série entière :
$$\sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n$$
7. (CCP 2000, Cen 2002) Soit :
$$u_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin\left(t^2\right)\, \mathrm{d}t$$
Rayon de convergence et domaine de convergence de $\sum_{n\geq 0} u_n\, x^n$. Étude du comportement au bord du domaine de définition.

8. (1996) Soit (a_n) une suite de réels > 0. $R > 0$ le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n^\alpha z^n$ pour $\alpha > 0$ puis pour $\alpha < 0$.
9. (CCP 2001) Existence et calcul de :
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\, 2^n}$$
10. (D'après TPE 2001) Soit $u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\, \mathrm{d}t$. Sans calculer l'intégrale, déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} u_n\, x^n$. Déterminer $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$.
11. (X 1997) Calculer $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n-3}{n(n^2-4)}$.
12. (X 2000) Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+n^3}{(n+1)!}$.
13. (CCP 1999) Rayon de convergence et somme de $\sum_{n\geq 0} \mathrm{ch}(na) x^n$?
14. (Cen 1999) Convergence et somme de $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{3n!}$.
15. (Cen 2002) Convergence et somme de :
$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^3+5}{n!} x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{\cos(2nx)}{2^{2n}}$$
16. (CCP 1999) Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Rayon de convergence ? Intervalle de continuité de la somme de $\sum_{n\geq 0} \arctan\left(n^\alpha\right) x^n$?
17. (Mines 1999) Calculer, pour tout réel α, le rayon de convergence de :
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\cos\left(\frac{2k\pi}{5} + \alpha\right) z\right]^k$$
18. (Cen 2000) Convergence et somme de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.
19. (Cen 2002) Convergence et somme de $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n}{3n+2}$.
20. (CCP 2000) Rayon et somme de $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{2n+1}$.
21. (St Cyr 2000) Rayon de convergence et somme de $\sum_{n\geq 2} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}\, x^n$. Etude de la convergence et de la somme aux bords de l'intervalle ouvert de convergence.

22. (Cen 1997 et CCP 1999) On considère la série entière de terme général $\dfrac{2n+1}{2n-1}\,x^{n-1}$ $(n \geq 1)$.
   (a) Rayon de convergence ?
   (b) Etude aux bornes.
   (c) Calcul de la somme.
23. (Mines 2002 et 2003) Rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} a_n\, x^n$ avec :

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}\right)$$

   Étude du comportement de la somme aux bords de l'intervalle ouvert de convergence.
24. (Navale 2000) Convergence et somme de $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n\,(n+5)}{(n+1)(n+2)}$.
25. (Cen 2000) Pour $x \in \mathbf{R}^*$, on pose :

$$F(x) = \int_0^x \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t$$

   (a) Montrer que F se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et calculer $F'(x)$.
   (b) Trouver une relation entre $F(x)$ et $F(1/x)$.
   (c) On note f la fonction $x \mapsto \frac{F(x)}{x}$, convenablement prolongée en 0. Montrer qu'elle est développable en série entière sur $]-1,1[$, étudier la convergence et la somme de la série entière en ± 1.
   (d) Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$. Calculer $f(x)$ et $f(1/x)$.
26. (Mines 1997) Intégrer $y' = 2xy + 1$. En déduire, pour $p \geq 1$:

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k \binom{p}{k}}{2k+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

27. (Cen 1997) Rayon de convergence et somme de :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n} x^n$$

28. (Cen 1997) Domaine de convergence de $\sum x^{[\sqrt{n}]}$.
29. (Cen 2002) Calculer :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n\,(2n+1)\,(2n+2)}$$

30. (Mines 1997) Calculer :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(4n+1)}$$

31. (X 1997) Somme de la série entière de terme général :

$$\frac{\sin(n\alpha)\,x^n}{n!}$$

32. (X 1997) Ensemble de définition de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\; z^n}{\sqrt{n} + \cos n}$$

33. (Cen 2003) Soit (a_n) une suite réelle vérifiant, pour $n \geq 1$:

$$a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = n(-1)^n$$

   Expliciter a_n en fonction de a_0, a_1 et n.
34. (X 97, Mines 98 et 2003, Cen 2002 et 2003) Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k} \end{cases}$$

   En considérant $\sum_{n\geq 0} u_n x^n$ calculer u_n et en trouver un équivalent.
35. (X 2003) Soit (u_n) une suite réelle telle que, pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{u_{n-k}}{k!} = 1$$

   Déterminer la limite de la suite (u_n).

36. (CCP 2000) Soit (a_n) une suite récurrente définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \frac{n+b}{n+2}\, a_n$. Donner le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n\, x^n$ et une équation différentielle, que l'on résoudra, satisfaite par sa somme.
37. (CCP 2000) Existence et calcul de :
$$\int_0^a \frac{t^n}{\sqrt{a-t}}\,\mathrm{d}t \qquad n \in \mathbf{N},\ a > 0$$
38. (Mines 1999) Soit f définie sur $]-\pi/2, \pi/2[$ par :
$$f(x) = \frac{1}{\cos x}$$
    (a) Trouver un développement limité d'ordre 2 de f au voisinage de 0.
    (b) On suppose que f admet un développement en série entière sur $]-R, R[$ $(R > 0)$. Justifier qu'on peut écrire, sur cet intervalle, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$.
    (c) Trouver alors une relation de récurrence entre les a_n.
    (d) Montrer qu'existe $\rho > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|a_n| \leq \rho^n$.
    (e) Montrer que f admet un développement en série entière au voisinage de 0, dont on majorera le rayon de convergence.
39. (Mines 1999) On considère la suite (a_n) définie par :
$$a_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k.k!$$
    (a) Limite et équivalent de a_n ?
    (b) On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Quel est le domaine de définition de f ?
    (c) Limites de f aux bornes de l'intervalle ouvert de convergence ?
40. (Cen 1999) Pour $n \geq 1$, on pose :
$$v_n = \frac{(n+2)!}{1.3.6\ldots 3n}$$
Rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} v_n x^{3n}$ et calcul de la somme.

41. (Cen 2000) Pour $n \geq 2$, on pose :
$$v_n = \frac{(n-1)!}{2.4\ldots 2n}$$
Rayon de convergence de $\sum_{n\geq 2} v_n x^{2n}$ et étude de la convergence aux bornes de l'intervalle ouvert de convergence. Calcul de la somme.
42. (Cen 1999) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que, pour tout n et pour tout $x \in]-2, 2[$ on ait :
$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{n!}{2^n}$$
Montrer que f est développable en série entière sur cet intervalle.
43. (Mines 2002) En cherchant d'abord une solutions développables en série entière au voisinage de 0, intégrer sur $\mathbf{R}$:
$$4x\, y" + y' + 2y = 0$$
44. (Cen 2002) En cherchant d'abord une solutions développables en série entière, intégrer :
$$x\, y" - y' + x^3 y = 0$$
45. (CCP 1999) En cherchant d'abord des solutions développables en série entière, intégrer :
$$x(x^2+1)y" + 2(x^2+1)y' - 2xy = 0$$
46. (CCP 98) Trouver les solutions développable en série entière de
$$(1+x^2)y" - 2y = 0$$
47. (1996) Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^3}{n!}$.
48. (1996) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$.
    (a) Montrer, sans calculer les a_n que :
$$\exists (A, k) \in]0, +\infty[^2,\ |a_n| \leq Ak^n$$
    (b) Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est > 0.
    (c) Calculer la somme de la série entière, en déduire les a_n.

49. (1996) Calculer, pour $p,n \in \mathbf{N}$ $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(p-n)t}\,\mathrm{d}t$. En déduire :

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\cos t}\cos(\sin t - nt)\,\mathrm{d}t$$

50. (CCP 98) Donner par plusieurs méthode le développement en série entière de $x \mapsto \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$
51. (Cen 1998) Développement en série entière de $x \mapsto \sin(\alpha \arcsin x)$ au voisinage de 0.
52. (Ccp 2003) Développement en série entière de $x \mapsto \arctan\left(\dfrac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}\right)$ au voisinage de 0
53. (X 97 et CCP 98) Montrer que la fonction $x \mapsto \arctan^2 x$ est développable en série entière au voisinage de 0 et donner le rayon de convergence de la série entière. déterminer ce développement en série entière.
54. (Mines 1998) Développement en série entière, au voisinage de 0 de $x \mapsto \sqrt{\sqrt{1+x^2}+x}$.
55. (Cen 2002) Rayon de convergence et somme de $\sum_{n\geq 0} a_n\, x^n$ où la suite (a_n) est définie par :

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}\, a_{n-1} \quad \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

56. (X 1997) $a \in \mathbf{R}$, on considère la suite (a_n) définie par :

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + \frac{a_{n-1}}{n+1} \quad \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

   (a) Montrer que la suite de terme général $b_n = \dfrac{a_n}{n}$ converge.
   (b) Etudier la limite de (b_n) en fonction de a.
   (c) Utiliser la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ afin de connaître l'application :

$$a \mapsto \lim_{n\to\infty} b_n$$

57. (1996) Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 1,\ u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} u_k u_{n-k}$$

Que dire du rayon de convergence de $\sum u_n x^n$?

58. (1996) Résoudre l'équation différentielle :

$$3x\,(x+1)\,y" + (8x+3)\,y' + 2\,y = 0$$

59. (1996) Soit $u_n = a + \dfrac{n}{3} - \left[\dfrac{n}{3}\right]$. et $a > 0$. Rayon de convergence et somme de $\sum u_n z^n$.
60. (1996) On considère les deux séries entières de termes généraux :

$$u_n = a_n\, z^n \qquad v_n = (a_{n+1} - a_n)\, z^n$$

   (a) Comparer leurs rayons de convergence.
   (b) On suppose que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to \lambda \in \mathbf{R}$. Les rayons sont ils égaux ?
   (c) Donner un exemple simple où les rayons diffèrent.

61. (Cen 2000) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels. On pose $S_p = \sum_{k=1}^{p} a_k$. On note R *resp* R_1 le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n\, x^n$ *resp* $\sum_{n\geq 1} S_n\, x^n$. On suppose $R > 0$ et on note $f(x)$ et $g(x)$ les sommes respectives de ces séries dans leurs intervalles ouverts respectifs de convergence.
   (a) Comparer R et R_1 puis $f(x)$ à $g(x)$.
   (b) Donner un exemple où $R > 1$, $R_1 = R$ puis un autre avec $R > 1$, $R_1 = 1$.
62. (Cen 97 et Cen 2002) Soit (b_n) une suite de réels strictement positifs et (a_n) une suite réelle telle que $a_n \sim b_n$.
   (a) On suppose que la série entière de terme général $b_n x^n$ a un rayon infini. Quel est le rayon de $\sum a_n x^n$?
   (b) Soient f et g les sommes de ces deux séries. Prouver que $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de $+\infty$.

(c) Equivalent de :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1!+2!+\cdots+n!}$$

quand $x \to +\infty$.

63. (Cen 2000) Soit (b_n) une suite de réels strictement positifs et (a_n) une suite réelle telle que $a_n = o(b_n)$.
   (a) On suppose que la série entière de terme général $b_n x^n$ a un rayon infini. Quel est le rayon de $\sum a_n x^n$?
   (b) Soient f et g les sommes de ces deux séries. Prouver que $f(x) = o(g(x))$ quand $x \to +\infty$.
   (c) Montrer que, si y est une solution de :

$$y"(x) - 2\,x\,y'(x) + a\,y(x) = 0 \quad a \in \mathbf{R}$$

   alors, pour tout réel $\alpha > 1$, $y(x)\,\mathrm{e}^{-\alpha\,x^2} \to 0$ quand $x \to +\infty$.

64. (Cen 2000) Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$:

$$u_n = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(a+k)} \qquad \text{où } a > 0$$

   (a) Déterminer l'intervalle ouvert de convergence de $\sum_{n\geq 0} u_n\,x^n$ et montrer que sa somme f vérifie l'équation différentielle :

$$x\,y'(x) + (a-x)\,y(x) = a$$

   (b) On pose $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,t^{a-1}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $f(x) \sim \Gamma(a+1)\,\mathrm{e}^{x}\,x^{-a}$ quand $x \to +\infty$.

65. (Cen 2000) Pour $x \in]-1,1[$, on pose :

$$f(x) = \int_0^1 (1+x)^t\,\mathrm{d}t$$

   (a) f est-elle développable en série entière ? Que dire du rayon de convergence.
   (b) En déduire le développement en série entière de $\phi : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)}$.

66. (1996) Soit l'équation différentielle :

$$(E) \qquad (1+x^2)\,y" + x\,y' - k^2\,y = 0$$

   (a) Donner une solution de (E) sur un voisinage de l'origine sous forme d'une série entière.
   (b) Donner le rayon de convergence de la série.
   (c) Posant $\psi(t) = y(\operatorname{sh} t)$ avec y solution de (E), trouver une équation satisfaite par ψ.
   (d) Expliciter la solution trouvée.

67. (Centrale 2003)-
   (a) Pour quels x la série $\sum_{n\geq 0} x^{2^n}$ converge-t-elle ? On note $F(x)$ sa somme.
   (b) On note (a_p) la suite définie par :

$$a_p = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe un naturel } n \text{ tel que } p = 2^n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   exprimer $\sum_{p=0}^{n} a_p$ en fonction de $\ln n$.
   (c) Dévelopements en série entière au voisinage de 0 des fonctions :

$$x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{1-x} \qquad x \mapsto \frac{F(x)}{1-x} \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \frac{F(x)-x}{1-x}$$

   (d) Expliciter une constante K telle que, pour $x \in [0,1[$:

$$\left| F(x) - x - (1-x)K\sum_{n=2}^{\infty} \ln(n)\,x^n \right| \leq x^2$$

68. (1996) Soit l'équation différentielle :

$$|x|y' + (x^2-1)y + x = 0$$

   Existe-t-il une solution sur $\mathbf{R}$? Existe-t-il une solution développable en série entière sur $\mathbf{R}$?

69. (1996) Calculer $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t\, dt$. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 C_{2n}^n}$$

de la manière la plus simple possible.

70. (X 1996 et 1999) Définition, convergence, continuité de :

$$f(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^k}$$

Montrer que :

$$\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-t^k} = 1 + \sum_{n=1}^{N} p_n t^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(N) t^n$$

Où

$$p_n = \mathrm{card}\{(y_k) \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}^*},\ \sum_{k\geq 1} k y_k = n\}$$

Qu'en déduire ?

71. (CCP 1997) Résoudre $4\,x\,y" + 2\,y' - y = 0$

72. (X 1998)

(a) Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de complexes telle que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge. Prouver que le série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est uniformément convergente sur $[0,1]$. Pour cela on démontrera que, pour $0 \leq x \leq 1$:

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n x^n = R_N x^N + \sum_{n=N}^{\infty} R_n (x^n - x^{n-1}) \quad \text{avec} \quad R_N = \sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

(b) Pour $n \geq 1$ on pose :

$$u_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)(n-k)}$$

Nature de $\sum_{n\geq 1} u_n$?

(c) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

73. (1996) Trouver $F \in \mathbf{C}(X)$ telle que $F(X^2) - F(X) = \dfrac{X}{X^2-1}$. Convergence et somme de :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}}$$

74. (1995) Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x + x^n)^n$$

Domaine de définition ? Limites aux bornes du domaine ? Montrer que f admet un développement limité à tout ordre en 0. Montrer que f est développable en série entière sur son domaine d'existence.

75. (1995) Expliciter

$$\sum_{0}^{n} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}$$

76. (Cen 2003) Pour $p \in \mathbf{N}$, on pose :

$$H_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^p x^n$$

Calculer H_0 et H_1, trouver une relation entre H_p et H_{p+1} et un équivalent de $H_p(x)$ en 1_-.

77. Trouver un équivalent au voisinage de 1^- de :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(n) x^n$$

78. Trouver un équivalent au voisinage de 1^- de :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$$

79. (X 2002) Pour $(t,x) \in \mathbf{R}^2$, on pose :

$$f(t,x) = \mathrm{e}^{-tx - \frac{x^2}{2}}$$

(a) Prouver l'existence d'une suite (H_n) de polynômes telle que pour tout t et tout x la série $\sum_{n\geq 0} H_n(t)\, x^n$ soit convergente de somme $f(t,x)$.

(b) Prouver la formule :

$$H_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!}\,\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

(c) Calculer, si $k \neq n$:

$$\int_{\mathbf{R}} H_n(t)\, H_k(t)\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$$

Peut-on calculer la valeur de cette intégrale si $k = n$?

80. (1995) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit ϕ un polynôme de degré $p > 1$. Trouver le rayon et donner une expression de la somme de $\sum a_n \phi(n) z^n$.

81. -

(a) Domaine de convergence de :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n x^n$$

Montrer que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

(b) Equivalent de $f(x)$ quand $x \to 1$.

(c) Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, trouver un équivalent de a_n.

82. (CCP 2001) Soit $a \in]0,1[$.

(a) Déterminer le domaine de définition I de :

$$\sum_{n\geq 0} \sin\left(a^n\, x\right)$$

On note $f(x)$ sa somme sur I.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et qu'il existe $M > 0$ tel que pour $k \geq 1$ et $x \in I$ on ait $|f^{(k)}(x)| \leq M$.

(c) Montrer que f est développable en série entière sur un intervalle à déterminer.

83. (1995) Soit

$$F = \frac{1}{1 - aX + aX^2 - X^3}$$

Prouver que F est développable en série entière au voisinage de 0 et donner des conditions sur a pour que tous les coefficients du développement soient positifs.

84. (X 1997) Calculer :

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1 - 2ux + u^2)(1 - 2vx + v^2)}}$$

en posant :

$$t = \sqrt{\frac{1 - 2ux + u^2}{1 - 2vx + v^2}}$$

On pose :

$$\frac{1}{1 - 2ux + u^2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) u^n$$

Calculer

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, \mathrm{d}x$$

pour tout couple (n,m) d'entiers naturels.
(Le candidat note que l'examinateur (Letac) n'a pas été regardant sur les interversions de symboles.)

85. (1995) Soit (a_n) une suite d'éléments de $\{-1, 1\}$ telle que $a_0 = 1$, et qu'en posant :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

on ait :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \forall x \geq 0,\ |f^{(p)}(x)| \leq 1$$

Montrer que $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$

86. (1995) Calculer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!(n+1)}$$

87. (1995) Développer en série entière :

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+2xt-xt^2}$$

Préciser le rayon de convergence, appliquer au calcul de :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

88. (TPE 1999) Rayon de convergence de :

$$1+\sum_{n\geq 1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{x^n}{n!}\ ?$$

On note $f(x)$ la somme. Equivalent de $f(x)$ quand $n \to \infty$?

89. (X 2000) On définit, pour $z \in \mathbf{C}$:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

Démontrer que $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

90. (Cen 2000) Soient f et g les fonctions réelles définies par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \mathrm{e}^{f(x)}$$

Domaine de définition de g ? Continuité et dérivabilité de g ? Montrer que g est développable en série entière au voisinage de 0.

91. Soit $x^2 - sx + p$ un trinôme à coefficients réels sans racine réelle, $f(x) = \sqrt{x^2 - sx + p}$.
   (a) Montrer que f est développable en série entière dans un voisinage de 0. On note (a_n) la suite des coefficients de la série.
   (b) Montrer que le rayon de convergence R de la série est $\geq \sqrt{p}$.
   (c) On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pour $|z| < R$. Prouver que $f(z)^2 = z^2 - sz + p$ pour $|z| < R$. En déduire R.

92. (Mines 1997) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini dont la somme est notée $f(z)$. Calculer :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

En déduire que, si f est bornée sur $\mathbf{C}$, elle est constante.

93. (1996 et Cen 1999)
   (a) Calculer $I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q$.
   (b) Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{[(2n+1)!]^2}$

94. (X 1996) Soit $(a_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ définie par :

$$a_n = a_{n-2}\left(\frac{(n-1)^2+\lambda-\frac{1}{4}}{4n^2}\right) + \mathrm{i}\,a_{n-1}\left(\frac{4(n-1)^2+2\lambda-1}{4n^2}\right)$$

où $0 < \lambda < \dfrac{1}{4}$ Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $\geq 2(\sqrt{2}-1)$.

95. (X1997) Pour quels couples (a, b), la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n + b^n}{n^2}$$

converge-t'elle ? On note $S(a, b)$ sa somme. Calculer sur les bons domaines :

$$S\left(x, \frac{x}{x-1}\right) \qquad S(x, 1-x)$$

96. (ENSP 1997) Trouver la limite quand $t \to 1^-$ de :

$$\sqrt{1-t}\sum_{n=0}^{\infty} t^{n^2}$$

97. (a) Soit $q \in]0, 1[$ un réel. Montrer, pour $z \in \mathbf{C}$, la convergence de :

$$f(z) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + q^n z)$$

(b) Trouver les zéros de f.

(c) Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbf{R}$. et déterminer son développement.

(d) Trouver un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.

98. (X 1998) On considère une suite complexe (a_n) telle qu'existent des complexes $(\alpha_k)_{1\leq k\leq p}$ tels qu'à partir d'un certain rang q :

$$a_{n+p} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \, a_{n+p-k}$$

(a) Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence > 0.

(b) Montrer que sa somme est une fraction rationnelle.

(c) (Subsidiaire non posée) Démontrer une réciproque de la question précédente.

99. (Cen 2000, 2003) Pour $p \in \mathbf{N}$, $p \geq 2$ on pose :

$$S_p(X) = \prod_{k=0}^{p-1}(X+2k), \quad S_0 = 1,\ S_1 = X$$

et, pour $P \in \mathbf{R}[X]$ et $x \in \mathbf{R}$:

$$\phi(P)(x) = \mathrm{e}^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(-2n)}{n!}\, x^n$$

(a) Montrer que la famille $(S_p)_{0\leq p\leq n}$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

(b) Montrer que ϕ est bien définie. Calculer, avec Maple, $\phi(S_p)$ pour $p \leq 10$.

(c) Montrer que ϕ est un automorphisme de $\mathbf{R}[X]$ et calculer ses valeurs propres.