



## Polynômes

---

### Exercice 1

Effectuer les divisions euclidiennes de

$$3X^5 + 4X^2 + 1 \text{ par } X^2 + 2X + 3,$$

$$3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1 \text{ par } X^3 + X + 2,$$

$$X^4 - X^3 + X - 2 \text{ par } X^2 - 2X + 4.$$

[Correction ▼](#)

[000364]

### Exercice 2

Effectuer la division selon les puissances croissantes de :

$$X^4 + X^3 - 2X + 1 \text{ par } X^2 + X + 1 \text{ à l'ordre 2.}$$

[Correction ▼](#)

[000366]

### Exercice 3

Trouver les polynômes  $P$  tels que  $P + 1$  soit divisible par  $(X - 1)^4$  et  $P - 1$  par  $(X + 1)^4$  :

1. en utilisant la relation de Bézout,
2. en considérant le polynôme dérivé  $P'$ .

Combien y a-t-il de solutions de degré  $\leq 7$  ?

[Correction ▼](#)

[000370]

### Exercice 4

Effectuer la division de  $A = X^6 - 2X^4 + X^3 + 1$  par  $B = X^3 + X^2 + 1$  :

1. Suivant les puissances décroissantes.
2. À l'ordre 4 (c'est-à-dire tel que le reste soit divisible par  $X^5$ ) suivant les puissances croissantes.

[Correction ▼](#)

[000371]

### Exercice 5

Effectuer la division euclidienne de  $X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$  par  $X^2 - 5X + 4$ .

[Correction ▼](#)

[000375]

### Exercice 6

Quels sont les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P'$  divise  $P$  ?

[Correction ▼](#)

[000378]

### Exercice 7

Calculer  $\text{pgcd}(P, Q)$  lorsque :

1.  $P = X^3 - X^2 - X - 2$  et  $Q = X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$ ,
2.  $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$  et  $Q = X^3 + X + 1$ .

**Exercice 8**

Déterminer le pgcd des polynômes suivants :

$$X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1 \text{ et } X^4 + 2X^3 + X + 2,$$

$$X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1 \text{ et } X^3 + X^2 - X - 1,$$

$$X^5 + 5X^4 + 9X^3 + 7X^2 + 5X + 3 \text{ et } X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1.$$

Correction ▼

[000380]

**Exercice 9**

Calculer le pgcd  $D$  des polynômes  $A$  et  $B$  définis ci-dessous. Trouver des polynômes  $U$  et  $V$  tels que  $D = AU + BV$ .

$$1. A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2 \quad \text{et} \quad B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6.$$

$$2. A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X \quad \text{et} \quad B = X^4 - 2X^3 + X^2 - X + 1.$$

Correction ▼

[000387]

**Exercice 10**

Décomposer dans  $\mathbb{R}[X]$ , sans déterminer ses racines, le polynôme  $P = X^4 + 1$ , en produit de facteurs irréductibles.

Correction ▼

[000401]

**Exercice 11**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , quel est l'ordre de multiplicité de 2 comme racine du polynôme

$$nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}$$

Correction ▼

[000409]

**Exercice 12**

Pour quelles valeurs de  $a$  le polynôme  $(X+1)^7 - X^7 - a$  admet-il une racine multiple réelle ?

Correction ▼

[000410]

**Exercice 13**

Dans  $\mathbb{R}[X]$  et dans  $\mathbb{C}[X]$ , décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles.

$$1. X^3 - 3.$$

$$2. X^{12} - 1.$$

Correction ▼

[000412]

**Exercice 14**

Factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  :

$$1. X^6 + 1.$$

$$2. X^9 + X^6 + X^3 + 1.$$

Correction ▼

[000423]

**Exercice 15**

Trouver un polynôme  $P$  de degré  $\leq 2$  tel que

$$P(1) = -2 \quad \text{et} \quad P(-2) = 3 \quad \text{et} \quad P(0) = -1$$

Correction ▼

[000426]

---

**Exercice 16**

---

Trouver un polynôme  $P$  de degré minimum tel que

$$P(0) = 1 \quad \text{et} \quad P(1) = 0 \quad \text{et} \quad P(-1) = -2 \quad \text{et} \quad P(2) = 4$$

[Correction ▼](#)

[000427]

---

---

**Correction de l'exercice 1 ▲**

---

1.  $A = 3X^5 + 4X^2 + 1, B = X^2 + 2X + 3$ , le quotient de  $A$  par  $B$  est  $3X^3 - 6X^2 + 3X + 16$  et le reste  $-47 - 41X$ .
  2.  $A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1, B = X^3 + X + 2$  le quotient de  $A$  par  $B$  est  $3X^2 + 2X - 3$  et le reste est  $7 - 9X^2 - X$ .
  3.  $A = X^4 - X^3 - X - 2, B = X^2 - 2X + 4$ , le quotient de  $A$  par  $B$  est  $X^2 + X - 2$  de reste  $6 - 9X$ .
- 

**Correction de l'exercice 2 ▲**

---

$$X^4 + X^3 - 2X + 1 = (X^2 + X + 1)(2X^2 - 3X + 1) + X^3(2 - X).$$

---

**Correction de l'exercice 3 ▲**

---

Les solutions sont les polynômes de la forme

$$P = \frac{1}{16}(5X^7 - 21X^5 + 35X^3 - 35X) + A(X - 1)^4(X + 1)^4$$

où  $A$  est un polynôme quelconque ; une seule solution de degré  $\leq 7$ .

---

**Correction de l'exercice 4 ▲**

---

1. Quotient  $Q = X^3 - X^2 - X + 1$ , reste  $R = X$ .
  2. Quotient  $Q = 1 - X^2 - X^4$ , reste  $R = X^5(1 + 2X + X^2)$ .
- 

**Correction de l'exercice 5 ▲**

---

Soient  $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9, B = X^2 - 5X + 4$ , le quotient de  $A$  par  $B$  est  $X^3 - 2X^2 - 14X - 63$ , le reste étant  $261 - 268X$ .

---

**Correction de l'exercice 6 ▲**

---

Ce sont les polynômes de la forme  $\lambda(X - a)^k, k \in \mathbb{N}, \lambda, a \in \mathbb{C}$ .

---

**Correction de l'exercice 7 ▲**

---

1.  $\text{pgcd}(X^3 - X^2 - X - 2, X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2) = X - 2$ .
  2.  $\text{pgcd}(X^4 + X^3 - 2X + 1, X^3 + X + 1) = 1$ .
- 

**Correction de l'exercice 8 ▲**

---

1.  $\text{pgcd}(X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1, X^4 + 2X^3 + X + 2) = X^3 + 1$ .
  2.  $\text{pgcd}(X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1, X^3 + X^2 - X - 1) = X + 1$
  3.  $\text{pgcd}(X^5 + 5X^4 + 9X^3 + 7X^2 + 5X + 1, X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1) = 1$ .
- 

**Correction de l'exercice 9 ▲**

---

1.  $D = X^2 + 3X + 2 = A(\frac{1}{18}X - \frac{1}{6}) + B(-\frac{1}{18}X^2 + \frac{1}{9}X + \frac{5}{18})$ .
  2.  $D = 1 = A(-X^3) + B(X^5 + X^3 + X + 1)$ .
- 

**Correction de l'exercice 10 ▲**

---

$$(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

---

---

**Correction de l'exercice 11 ▲**

L'ordre de multiplicité est 2.

---

**Correction de l'exercice 12 ▲**

Pour  $a = \frac{1}{64}$  ; la racine multiple est  $-\frac{1}{2}$ .

---

**Correction de l'exercice 13 ▲**

$$\begin{cases} 1. & \begin{cases} X^3 - 3 &= (X - \sqrt[3]{3})(X^2 + \sqrt[3]{3}X + \sqrt[3]{9}) \\ &= (X - \sqrt[3]{3})(X + \frac{\sqrt[3]{3}}{2} - i\frac{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{3}}{2})(X + \frac{\sqrt[3]{3}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{3}}{2}). \end{cases} \\ 2. & \begin{cases} X^{12} - 1 &= (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1) \times \\ &\quad (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1) \\ &= (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i) \times \\ &\quad (X - \frac{1+i\sqrt{3}}{2})(X - \frac{1-i\sqrt{3}}{2})(X - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2})(X - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}) \times \\ &\quad (X - \frac{\sqrt{3}+i}{2})(X - \frac{\sqrt{3}-i}{2})(X - \frac{-\sqrt{3}+i}{2})(X - \frac{-\sqrt{3}-i}{2}). \end{cases} \end{cases}$$

---

**Correction de l'exercice 14 ▲**

- $X^6 + 1 = -(X^2 + 1)(X^2 + X\sqrt{3} + 1)(-X^2 + X\sqrt{3} - 1)$ .
  - $X^9 + X^6 + X^3 + 1 = -(X^2 + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X\sqrt{3} + 1)(-X^2 + X\sqrt{3} - 1)(X + 1)$ .
- 

**Correction de l'exercice 15 ▲**

Utiliser la formule d'interpolation de Lagrange !  $P = \frac{1}{3}(X^2 - 4X - 3)$ .

---

**Correction de l'exercice 16 ▲**

Utiliser la formule d'interpolation de Lagrange !  $P = \frac{1}{2}(3X^3 - 4X^2 - X + 2)$ .

---