



## Limites de fonctions

---

### 1 Théorie

#### Exercice 1

---

1. Montrer que toute fonction périodique et non constante n'admet pas de limite en  $+\infty$ .
2. Montrer que toute fonction croissante et majorée admet une limite finie en  $+\infty$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000612]

#### Exercice 2

---

1. Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1$ .
2. Soient  $m, n$  des entiers positifs. Étudier  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$ .
3. Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\sqrt{1+x+x^2} - 1) = \frac{1}{2}$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000609]

### 2 Calculs

#### Exercice 3

---

Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

$$\begin{array}{lll}
 a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+2|x|}{x} & b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2|x|}{x} & c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} \\
 d) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} & e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} & f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} \\
 g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} & h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n-1}
 \end{array}$$

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000616]

#### Exercice 4

---

Calculer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

$$\begin{array}{l}
 \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x^n - \alpha^n}, \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x (\cos 2x - \cos x)}, \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x} - \sqrt{x}}}, \\
 \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{x - \alpha}}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}}, \quad (\alpha > 0) \\
 \lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{x}\right),
 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x^2 + x - 6},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{1 + x^\alpha \sin^2 x}, \text{ en fonction de } \alpha \in \mathbb{R}.$$

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000628]

### Exercice 5

Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 + \sin \frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^{-x}))^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}.$$

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000635]

### Exercice 6

Trouver pour  $(a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000638]

### Exercice 7

Déterminer les limites suivantes, en justifiant vos calculs.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x^2 \ln x}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln(x + \sqrt{x})$
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x \ln x}$
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$
6.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{\ln(x+1)}$
7.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x+1} \ln\left(\frac{x^3+4}{1-x^2}\right)$
8.  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^2 - 1) \ln(7x^3 + 4x^2 + 3)$
9.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^2 \ln(x^3 - 8)$
10.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^x - 1)}{\ln(x+1)}$
11.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - x \ln(x+2))$
12.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2 - x}$
13.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\ln x}$
14.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$
15.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3+5}{x^2+2}\right)^{\frac{x+1}{x^2+1}}$
16.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x+1}}$
17.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(1+x))^{\frac{1}{\ln x}}$
18.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{(x^{x-1})}}{x^{(x^x)}}$
19.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^x}{x^{x+1}}$

20.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{\ln(x^2+1)}}{1+e^{x-3}}$

[Correction ▼](#)

[000623]

---

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

---

1. Reasonner par l'absurde.
  2. Montrer que la limite est la borne supérieure de l'ensemble des valeurs atteintes  $f(\mathbb{R})$ .
- 

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

---

Utiliser l'expression conjuguée.

---

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

---

Réponses :

1. La limite à droite vaut  $+2$ , la limite à gauche  $-2$  donc il n'y a pas de limite.
  2.  $-\infty$
  3. 4
  4. 2
  5.  $\frac{1}{2}$
  6. 0
  7.  $\frac{1}{3}$  en utilisant par exemple que  $a^3 - 1 = (a - 1)(1 + a + a^2)$  pour  $a = \sqrt[3]{1+x^2}$ .
  8.  $\frac{1}{n}$
- 

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

---

1. Calculer d'abord la limite de  $f(x) = \frac{x^k - \alpha^k}{x - \alpha}$ .
  2. Utiliser  $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$  et faire un changement de variable  $u = \cos x$ .
  3. Utiliser l'expression conjuguée.
  4. Diviser numérateur et dénominateur par  $\sqrt{x - \alpha}$  puis utiliser l'expression conjuguée.
  5. On a toujours  $y - 1 \leq E(y) \leq y$ , poser  $y = 1/x$ .
  6. Diviser numérateur et dénominateur par  $x - 2$ .
  7. Pour  $\alpha \geq 4$  il n'y a pas de limite, pour  $\alpha < 4$  la limite est  $+\infty$ .
- 

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

---

Réponses :  $0, \frac{1}{e}, e$ .

1. Borner  $\sin \frac{1}{x}$ .
  2. Utiliser que  $\ln(1+t) = t \cdot \mu(t)$ , pour une certaine fonction  $\mu$  qui vérifie  $\mu(t) \rightarrow 1$  lorsque  $t \rightarrow 0$ .
  3. Utiliser que  $e^t - 1 = t \cdot \mu(t)$ , pour une certaine fonction  $\mu$  qui vérifie  $\mu(t) \rightarrow 1$  lorsque  $t \rightarrow 0$ .
- 

**Indication pour l'exercice 6 ▲**

---

Réponse :  $\sqrt{ab}$ .

---

### Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit  $p > 0$  la période : pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x+p) = f(x)$ . Par une récurrence facile on montre :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+np) = f(x).$$

Comme  $f$  n'est pas constante il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $f(a) \neq f(b)$ . Notons  $x_n = a + np$  et  $y_n = b + np$ . Supposons, par l'absurde, que  $f$  a une limite  $\ell$  en  $+\infty$ . Comme  $x_n \rightarrow +\infty$  alors  $f(x_n) \rightarrow \ell$ . Mais  $f(x_n) = f(a+np) = f(a)$ , donc  $\ell = f(a)$ . De même avec la suite  $(y_n) : y_n \rightarrow +\infty$  donc  $f(y_n) \rightarrow \ell$  et  $f(y_n) = f(b+np) = f(b)$ , donc  $\ell = f(b)$ . Comme  $f(a) \neq f(b)$  nous obtenons une contradiction.

2. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction croissante et majorée par  $M \in \mathbb{R}$ . Notons

$$F = f(\mathbb{R}) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

$F$  est un ensemble (non vide) de  $\mathbb{R}$ , notons  $\ell = \sup F$ . Comme  $M \in \mathbb{R}$  est un majorant de  $F$ , alors  $\ell < +\infty$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , par les propriétés du sup il existe  $y_0 \in F$  tel que  $\ell - \varepsilon \leq y_0 \leq \ell$ . Comme  $y_0 \in F$ , il existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x_0) = y_0$ . Comme  $f$  est croissante alors :

$$\forall x \geq x_0 \quad f(x) \geq f(x_0) = y_0 \geq \ell - \varepsilon.$$

De plus par la définition de  $\ell$  :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq \ell.$$

Les deux propriétés précédentes s'écrivent :

$$\forall x \geq x_0 \quad \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell.$$

Ce qui exprime bien que la limite de  $f$  en  $+\infty$  est  $\ell$ .

### Correction de l'exercice 2 ▲

Généralement pour calculer des limites faisant intervenir des sommes de racines carrées, il est utile de faire intervenir "l'expression conjuguée" :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Les racines au numérateur ont "disparu" en utilisant l'identité  $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$ .

Appliquons ceci sur un exemple :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n} \\ &= \frac{(\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m})(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} \\ &= \frac{1+x^m - (1-x^m)}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} \\ &= \frac{2x^m}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} \\ &= \frac{2x^{m-n}}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}} \end{aligned}$$

Et nous avons

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}} = 1.$$

Donc l'étude de la limite de  $f$  en 0 est la même que celle de la fonction  $x \mapsto x^{m-n}$ .

Distinguons plusieurs cas pour la limite de  $f$  en 0.

- Si  $m > n$  alors  $x^{m-n}$ , et donc  $f(x)$ , tendent vers 0.

- Si  $m = n$  alors  $x^{m-n}$  et  $f(x)$  tendent vers 1.

- Si  $m < n$  alors  $x^{m-n} = \frac{1}{x^{n-m}} = \frac{1}{x^k}$  avec  $k = n - m$  un exposant positif. Si  $k$  est pair alors les limites à droite et à gauche de  $\frac{1}{x^k}$  sont  $+\infty$ . Pour  $k$  impair la limite à droite vaut  $+\infty$  et la limite à gauche vaut  $-\infty$ . Conclusion pour  $k = n - m > 0$  pair, la limite de  $f$  en 0 vaut  $+\infty$  et pour  $k = n - m > 0$  impair  $f$  n'a pas de limite en 0 car les limites à droite et à gauche ne sont pas égales.

### Correction de l'exercice 3 ▲

- $\frac{x^2+2|x|}{x} = x + 2\frac{|x|}{x}$ . Si  $x > 0$  cette expression vaut  $x+2$  donc la limite à droite en  $x=0$  est  $+2$ . Si  $x < 0$  l'expression vaut  $-2$  donc la limite à gauche en  $x=0$  est  $-2$ . Les limites à droite et à gauche sont différentes donc il n'y a pas de limite en  $x=0$ .
- $\frac{x^2+2|x|}{x} = x + 2\frac{|x|}{x} = x - 2$  pour  $x < 0$ . Donc la limite quand  $x \rightarrow -\infty$  est  $-\infty$ .
- $\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}$ , lorsque  $x \rightarrow 2$  cette expression tend vers 4.

4.  $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x} = 1 - \cos x$ . Lorsque  $x \rightarrow \pi$  la limite est donc 2.
5.  $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} \times \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x-(1+x^2)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})} = \frac{x-x^2}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})} = \frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}$ . Lorsque  $x \rightarrow 0$  la limite vaut  $\frac{1}{2}$ .
6.  $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3} = (\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}) \times \frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \frac{x+5-(x-3)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \frac{8}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}$ . Lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , la limite vaut 0.
7. Nous avons l'égalité  $a^3 - 1 = (a-1)(1+a+a^2)$ . Pour  $a = \sqrt[3]{1+x^2}$  cela donne :

$$\frac{a-1}{x^2} = \frac{a^3-1}{x^2(1+a+a^2)} = \frac{1+x^2-1}{x^2(1+a+a^2)} = \frac{1}{1+a+a^2}.$$

Lors que  $x \rightarrow 0$ , alors  $a \rightarrow 1$  et la limite cherchée est  $\frac{1}{3}$ .

Autre méthode : si l'on sait que la limite d'un taux d'accroissement correspond à la dérivée nous avons une méthode moins astucieuse. Rappel (ou anticipation sur un prochain chapitre) : pour une fonction  $f$  dérivable en  $a$  alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Pour la fonction  $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$  ayant  $f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$  cela donne en  $a = 0$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = \frac{1}{3}.$$

8.  $\frac{x^n-1}{x-1} = 1+x+x^2+\dots+x^{n-1}$ . Donc si  $x \rightarrow 1$  la limite de  $\frac{x^n-1}{x-1}$  est  $n$ . Donc la limite de  $\frac{x^n-1}{x^n-1}$  en 1 est  $\frac{1}{n}$ .  
La méthode avec le taux d'accroissement fonctionne aussi très bien ici. Soit  $f(x) = x^n$ ,  $f'(x) = nx^{n-1}$  et  $a = 1$ . Alors  $\frac{x^n-1}{x-1} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$  tend vers  $f'(1) = n$ .

#### Correction de l'exercice 4 ▲

1. Montrons d'abord que la limite de

$$f(x) = \frac{x^k - \alpha^k}{x - \alpha}$$

en  $\alpha$  est  $k\alpha^{k-1}$ ,  $k$  étant un entier fixé. Un calcul montre que  $f(x) = x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \alpha^2 x^{k-3} + \dots + \alpha^{k-1}$ ; en effet  $(x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \alpha^2 x^{k-3} + \dots + \alpha^{k-1})(x - \alpha) = x^k - \alpha^k$ . Donc la limite en  $x = \alpha$  est  $k\alpha^{k-1}$ . Une autre méthode consiste à dire que  $f(x)$  est le taux d'accroissement de la fonction  $x^k$ , et donc la limite de  $f$  en  $\alpha$  est exactement la valeur de la dérivée de  $x^k$  en  $\alpha$ , soit  $k\alpha^{k-1}$ . Ayant fait ceci revenons à la limite de l'exercice : comme

$$\frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x^n - \alpha^n} = \frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x - \alpha} \times \frac{x - \alpha}{x^n - \alpha^n}.$$

Le premier terme du produit tend vers  $(n+1)\alpha^n$  et le second terme, étant l'inverse d'un taux d'accroissement, tend vers  $1/(n\alpha^{n-1})$ . Donc la limite cherchée est

$$\frac{(n+1)\alpha^n}{n\alpha^{n-1}} = \frac{n+1}{n}\alpha.$$

2. La fonction  $f(x) = \frac{\tan x - \sin x}{\sin x(\cos 2x - \cos x)}$  s'écrit aussi  $f(x) = \frac{1-\cos x}{\cos x(\cos 2x - \cos x)}$ . Or  $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ . Posons  $u = \cos x$ , alors

$$f(x) = \frac{1-u}{u(2u^2-u-1)} = \frac{1-u}{u(1-u)(-1-2u)} = \frac{1}{u(-1-2u)}$$

Lorsque  $x$  tend vers 0,  $u = \cos x$  tend vers 1, et donc  $f(x)$  tend vers  $-\frac{1}{3}$ .

- 3.

$$\begin{aligned} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x} &= \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+1} \end{aligned}$$

Quand  $x \rightarrow +\infty$  alors  $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$  et  $\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}} \rightarrow 0$ , donc la limite recherchée est  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

4. La fonction s'écrit

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x+\alpha}} = \frac{\frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}} - 1}{\sqrt{x+\alpha}}.$$

Notons  $g(x) = \frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}$  alors à l'aide de l'expression conjuguée

$$g(x) = \frac{x-\alpha}{(\sqrt{x-\alpha})(\sqrt{x+\alpha})} = \frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x+\alpha}}.$$

Donc  $g(x)$  tend vers 0 quand  $x \rightarrow \alpha^+$ . Et maintenant  $f(x) = \frac{g(x)-1}{\sqrt{x+\alpha}}$  tend vers  $-\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$ .

5. Pour tout réel  $y$  nous avons la double inégalité  $y-1 < E(y) \leq y$ . Donc pour  $y > 0$ ,  $\frac{y-1}{y} < \frac{E(y)}{y} \leq 1$ . On en déduit que lorsque  $y$  tend vers  $+\infty$  alors  $\frac{E(y)}{y}$  tend 1. On obtient le même résultat quand  $y$  tend vers  $-\infty$ . En posant  $y = 1/x$ , et en faisant tendre  $x$  vers 0, alors  $x E(\frac{1}{x}) = \frac{E(y)}{y}$  tend vers 1.

6.

$$\frac{e^x - e^2}{x^2 + x - 6} = \frac{e^x - e^2}{x-2} \times \frac{x-2}{x^2+x-6} = \frac{e^x - e^2}{x-2} \times \frac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \frac{e^x - e^2}{x-2} \times \frac{1}{x+3}.$$

La limite de  $\frac{e^x - e^2}{x-2}$  en 2 vaut  $e^2$  ( $\frac{e^x - e^2}{x-2}$  est le taux d'accroissement de la fonction  $x \mapsto e^x$  en la valeur  $x = 2$ ), la limite voulue est  $\frac{e^2}{5}$ .

7. Soit  $f(x) = \frac{x^4}{1+x^\alpha \sin^2 x}$ . Supposons  $\alpha \geq 4$ , alors on prouve que  $f$  n'a pas de limite en  $+\infty$ . En effet pour  $u_k = 2k\pi$ ,  $f(2k\pi) = (2k\pi)^4$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $k$  (et donc  $u_k$ ) tend vers  $+\infty$ . Cependant pour  $v_k = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $f(v_k) = \frac{v_k^4}{1+v_k^\alpha}$  tend vers 0 (ou vers 1 si  $\alpha = 4$ ) lorsque  $k$  (et donc  $v_k$ ) tend vers  $+\infty$ . Ceci prouve que  $f(x)$  n'a pas de limite lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

Reste le cas  $\alpha < 4$ . Il existe  $\beta$  tel que  $\alpha < \beta < 4$ .

$$f(x) = \frac{x^4}{1+x^\alpha \sin^2 x} = \frac{x^{4-\beta}}{\frac{1}{x^\beta} + \frac{x^\alpha}{x^\beta} \sin^2 x}.$$

Le numérateur tend  $+\infty$  car  $4-\beta > 0$ .  $\frac{1}{x^\beta}$  tend vers 0 ainsi que  $\frac{x^\alpha}{x^\beta} \sin^2 x$  (car  $\beta > \alpha$  et  $\sin^2 x$  est bornée par 1). Donc le dénominateur tend vers 0 (par valeurs positives). La limite est donc de type  $+\infty/0^+$  (qui n'est pas indéterminée !) et vaut donc  $+\infty$ .

### Correction de l'exercice 5 ▲

1. Comme  $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq +1$  alors  $1 \leq 2 + \sin \frac{1}{x} \leq +3$ . Donc pour  $x > 0$ , nous obtenons  $\frac{x}{3} \leq \frac{x}{2 + \sin \frac{1}{x}} \leq x$ . On obtient une inégalité similaire pour  $x < 0$ . Cela implique  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 + \sin \frac{1}{x}} = 0$ .

2. Sachant que  $\frac{\ln(1+t)}{t} \rightarrow 1$  lorsque  $t \rightarrow 0$ , on peut le reformuler ainsi  $\ln(1+t) = t \cdot \mu(t)$ , pour une certaine fonction  $\mu$  qui vérifie  $\mu(t) \rightarrow 1$  lorsque  $t \rightarrow 0$ . Donc  $\ln(1+e^{-x}) = e^{-x} \mu(e^{-x})$ . Maintenant

$$\begin{aligned} (\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}} &= \exp\left(\frac{1}{x} \ln(\ln(1+e^{-x}))\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{x} \ln(e^{-x} \mu(e^{-x}))\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{x} (-x + \ln \mu(e^{-x}))\right) \\ &= \exp\left(-1 + \frac{\ln \mu(e^{-x})}{x}\right) \end{aligned}$$

$\mu(e^{-x}) \rightarrow 1$  donc  $\ln \mu(e^{-x}) \rightarrow 0$ , donc  $\frac{\ln \mu(e^{-x})}{x} \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

Bilan : la limite est  $\exp(-1) = \frac{1}{e}$ .

3.

4. Sachant  $\frac{e^x-1}{x} \rightarrow 1$  lorsque  $x \rightarrow 0$ , on reformule ceci en  $e^x - 1 = x \cdot \mu(x)$ , pour une certaine fonction  $\mu$  qui vérifie  $\mu(x) \rightarrow 1$  lorsque  $x \rightarrow 0$ . Cela donne  $\ln(e^x - 1) = \ln(x \cdot \mu(x)) = \ln x + \ln \mu(x)$ .

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} &= \exp\left(\frac{1}{\ln(e^x-1)} \ln x\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{\ln x + \ln \mu(x)} \ln x\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{1 + \frac{\ln \mu(x)}{\ln x}}\right) \end{aligned}$$

Maintenant  $\mu(x) \rightarrow 1$  donc  $\ln \mu(x) \rightarrow 0$ , et  $\ln x \rightarrow -\infty$  lorsque  $x \rightarrow 0$ . Donc  $\frac{\ln \mu(x)}{\ln x} \rightarrow 0$ . Cela donne

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{1}{1 + \frac{\ln \mu(x)}{\ln x}}\right) = \exp(1) = e.$$

### Correction de l'exercice 6 ▲

Soit

$$f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)\right)$$

$a^x \rightarrow 1, b^x \rightarrow 1$  donc  $\frac{a^x + b^x}{2} \rightarrow 1$  lorsque  $x \rightarrow 0$  et nous sommes face à une forme indéterminée. Nous savons que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ . Autrement dit il existe une fonction  $\mu$  telle que  $\ln(1+t) = t \cdot \mu(t)$  avec  $\mu(t) \rightarrow 1$  lorsque  $t \rightarrow 0$ .

Appliquons cela à  $g(x) = \ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)$ . Alors

$$g(x) = \ln\left(1 + \left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1\right)\right) = \left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1\right) \cdot \mu(x)$$

où  $\mu(x) \rightarrow 1$  lorsque  $x \rightarrow 0$ . (Nous écrivons pour simplifier  $\mu(x)$  au lieu de  $\mu\left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1\right)$ .)

Nous savons aussi que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ . Autrement dit il existe une fonction  $v$  telle que  $e^t - 1 = t \cdot v(t)$  avec  $v(t) \rightarrow 1$  lorsque  $t \rightarrow 0$ .

Appliquons ceci :

$$\begin{aligned} \frac{a^x + b^x}{2} - 1 &= \frac{1}{2}(e^{x \ln a} + e^{x \ln b}) - 1 \\ &= \frac{1}{2}(e^{x \ln a} - 1 + e^{x \ln b} - 1) \\ &= \frac{1}{2}(x \ln a \cdot v(x \ln a) + x \ln b \cdot v(x \ln b)) \\ &= \frac{1}{2}x(\ln a \cdot v(x \ln a) + \ln b \cdot v(x \ln b)) \end{aligned}$$

Reste à rassembler tous les éléments du puzzle :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \\ &= \exp\left(\frac{1}{x} \ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{x} g(x)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{x} \left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1\right) \cdot \mu(x)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot x(\ln a \cdot v(x \ln a) + \ln b \cdot v(x \ln b)) \cdot \mu(x)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}(\ln a \cdot v(x \ln a) + \ln b \cdot v(x \ln b)) \cdot \mu(x)\right) \end{aligned}$$

Or  $\mu(x) \rightarrow 1, v(x \ln a) \rightarrow 1, v(x \ln b) \rightarrow 1$  lorsque  $x \rightarrow 0$ . Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \exp\left(\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)\right) = \exp\left(\frac{1}{2} \ln(ab)\right) = \sqrt{ab}.$$

### Correction de l'exercice 7 ▲

- (a)  $-\infty$
- (b) 0



- (c)  $+\infty$
  - (d)  $+\infty$
  - (e)  $\frac{3}{2}$
  - (f)  $-\infty$
  - (g) 0
  - (h) 0
  - (i) 0
  - (j) 0
  - (k) -2
  - (l)  $-\infty$
  - (m) 1
  - (n)  $e^4$
  - (o) 1
  - (p)  $e$
  - (q)  $e$
  - (r) 0
  - (s) 0
  - (t) 0
-