Fonctions circulaires et hyperboliques inverse

1 Fonctions circulaires inverses

Exercice 1

Une statue de hauteur s est placée sur un piédestal de hauteur p. À quelle distance doit se placer un observateur (dont la taille est supposée négligeable) pour voir la statue sous un angle maximal ?

Indication ▼ Correction ▼ [000745]

Exercice 2

Écrire sous forme d'expression algébrique

$$\sin(\operatorname{Arccos} x), \quad \cos(\operatorname{Arcsin} x), \quad \sin(3 \operatorname{Arctan} x).$$

Indication ▼ Correction ▼ [000747]

Exercice 3

Résoudre les équation suivantes :

$$\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin}\frac{2}{5} + \operatorname{Arcsin}\frac{3}{5}, \quad \operatorname{Arccos} x = 2 \operatorname{Arccos}\frac{3}{4},$$

$$\operatorname{Arctan} x = 2 \operatorname{Arctan}\frac{1}{2}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [000749]

Exercice 4

Vérifier

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = \operatorname{sgn}(x)\frac{\pi}{2}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [000752]

Exercice 5

Démontrer les inégalités suivantes :

$$\operatorname{Arcsin} a < \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \quad \text{si } 0 < a < 1;$$

$$\operatorname{Arctan} a > \frac{a}{1+a^2} \quad \text{si } a > 0.$$

Indication ▼ Correction ▼ [000746]

2 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

Exercice 6

Calculer :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}(\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} (x - \ln(\operatorname{ch} x)).$$

Indication ▼ Correction ▼ [000759]

Exercice 7

Les réels x et y étant liés par

$$x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right),$$

calculer $\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x$ et $\operatorname{th} x$ en fonction de y.

Indication ▼ Correction ▼ [000764]

Exercice 8

1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(\operatorname{ch} x) = e^x.$$
2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(e^x) = \operatorname{ch} x.$$
Préciser le nombre de solutions.
3. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(e^x) = \operatorname{ch} x.$$
Préciser le nombre de solutions ; y a t-il des solutions continues sur $\mathbb{R}^+$?

Indication ▼ Correction ▼ [000758]

Exercice 9

Résoudre l'équation $x^y = y^x$ où x et y sont des entiers positifs non nuls.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000776]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Faire un dessin. Remarquer que maximiser l'angle d'observation α revient à maximiser $\tan\alpha$. Puis calculer $\tan\alpha$ en fonction de la distance et étudier cette fonction.

Indication pour l'exercice 2 ▲

Il faut utiliser les identités trigonométriques classiques. Pour la dernière expression commencer par calculer $\sin(\operatorname{Arctan} x)$, $\cos(\operatorname{Arctan} x)$.

Indication pour l'exercice 3 ▲

On compose les équations par la bonne fonction, par exemple sinus pour la première.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Faire une étude de fonction.
$\operatorname{sgn}(x)$ est la *fonction signe* : elle vaut $+1$ si $x > 0$, -1 si $x < 0$ (et 0 si $x = 0$).

Indication pour l'exercice 5 ▲

On pourra étudier les fonctions définies par la différence des deux termes de chaque inégalité.

Indication pour l'exercice 6 ▲

Réponses :

1. $\frac{3}{4}$;
2. $\ln 2$.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Il faut trouver $\operatorname{ch} x = \frac{1}{\cos(y)}$, $\operatorname{sh} x = \tan y$, $\operatorname{th} x = \sin y$.

Indication pour l'exercice 8 ▲

1. Regarder ce qui se passe en deux valeurs opposées x et $-x$.
2. Poser $X = e^x$.

Indication pour l'exercice 9 ▲

Montrer que l'équation $x^y = y^x$ est équivalente à $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$, puis étudier la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

Correction de l'exercice 1 ▲

On note x la distance de l'observateur au pied de la statue. On note α l'angle d'observation de la statue seule, et β l'angle d'observation du piedestal seul. Nous avons le deux identités :

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{p+s}{x}, \qquad \tan\beta = \frac{p}{x}.$$

En utilisante la relation $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$ on obtient

$$\tan\alpha = \frac{sx}{x^2+p(p+s)}.$$

Maintenant l'angle $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et la fonction tan est croissante sur cet intervalle, donc maximiser α est équivalent à maximiser $\tan\alpha$. Étudions la fonction $f(x) = \frac{sx}{x^2+p(p+s)}$ définie sur $x \in [0,+\infty[$. Après calculs f' ne s'annule qu'en $x_0 = \sqrt{p(p+s)}$ qui donne le maximum de f (en 0 et $+\infty$ l'angle est nul). Donc la distance optimale de vision est $x_0 = \sqrt{p(p+s)}$.
En complément on peut calculer l'angle maximum α_0 correspondant : par la relation $\tan\alpha_0 = f(x_0) = \frac{s}{2\sqrt{p(p+s)}}$, on obtient $\alpha_0 = \operatorname{Arctan}\frac{s}{2\sqrt{p(p+s)}}$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. $\sin^2 y = 1-\cos^2 y$ donc $\sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y}$. Donc $\sin \operatorname{Arccos} x = \pm\sqrt{1-\cos^2 \operatorname{Arccos} x} = \pm\sqrt{1-x^2}$ et comme $\operatorname{Arccos} x \in [0,\pi]$ on a $\sin \operatorname{Arccos} x = +\sqrt{1-x^2}$.
2. De la même manière on trouve la même formule pour : $\cos \operatorname{Arcsin} x = +\sqrt{1-x^2}$.
3. Commençons par calculer $\sin(\operatorname{Arctan} x)$, $\cos(\operatorname{Arctan} x)$. On utilise $1+\tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{1}{1-\sin^2 y}$ avec $y = \operatorname{Arctan} x$. Cela donne $\cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$ et $\sin^2 y = \frac{x^2}{1+x^2}$. En étudiant les signes de $\sin(y)$, $\cos(y)$ nous obtenons $\cos y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
   Il ne reste plus qu'à linéariser $\sin(3y)$: $\sin(3y) = 3\sin y\cos^2 y - \sin^3 y$, ce qui s'écrit aussi $\sin(3y) = 4\sin y\cos^2 y - \sin y$. Ces formules s'obtiennent à la main en écrivant d'abord $\sin(3y) = \sin(2y+y) = \sin(2y)\cos(y)+\cdots$. Ou alors à l'aide des nombres complexes et de la formule de Moivre en développant $\cos(3y)+i\sin(3y) = (\cos y+i\sin y)^3 = \cos^3 y+3i\cos^2 y\sin y+\cdots$ puis identifiants les parties imaginaires.
   Maintenant
   $$\sin(3\operatorname{Arctan} x) = \sin(3y) = 4\sin y\cos^2 y - \sin y = 4\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

1. En prenant le sinus de l'équation $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin}\frac{2}{5}+\operatorname{Arcsin}\frac{3}{5}$ on obtient $x = \sin(\operatorname{Arcsin}\frac{2}{5}+\operatorname{Arcsin}\frac{3}{5})$, donc $x = \frac{2}{5}\cos\operatorname{Arcsin}\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\cos\operatorname{Arcsin}\frac{2}{5}$. En utilisant la formule $\cos \operatorname{Arcsin} x = +\sqrt{1-x^2}$. On obtient $x = \frac{2}{5}\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{8}{25}+\frac{3\sqrt{21}}{25}$.
2. En prenant le cosinus de l'équation $\operatorname{Arccos} x = 2\operatorname{Arccos}\frac{3}{4}$ on obtient $x = \cos(2\operatorname{Arccos}\frac{3}{4})$ on utilise la formule $\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$ et on arrive à : $x = 2(\frac{3}{4})^2-1 = \frac{1}{8}$.
3. En prenant la tangente et à l'aide de $\tan(a+b) = \cdots$ on obtient : $x = \tan(2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}) = \frac{4}{3}$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Soit f la fonction sur $[-1,1]$ définie par $f(x) = \operatorname{Arcsin} x+\operatorname{Arccos} x$ alors $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ pour chaque $x \in]-1,1[$; donc f est une fonction constante sur l'intervalle $[-1,1]$ (car continue aux extrémités). Or $f(0) = \frac{\pi}{2}$ donc pour tout $x \in [-1,1]$, $f(x) = \frac{\pi}{2}$.
2. Soit $g(x) = \operatorname{Arctan} x+\operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$, la fonction est définie sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$. On a $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}+\frac{-1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$ donc g est constante sur chacun de ses intervalles de définition. $g(x) = c_1$ sur $]-\infty,0[$ et $g(x) = c_2$ sur $]0,+\infty[$. En calculant $g(1)$ et $g(-1)$ on obtient $c_1 = -\frac{\pi}{2}$ et $c_2 = +\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Soit $f(a) = \operatorname{Arcsin} a - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ sur $]0,1[$. Alors $f'(a) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-a^2}(1-a^2)} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\frac{-a^2}{1-a^2}$ donc $f'(a) \leq 0$. Ainsi f est strictement décroissante et $f(0) = 0$ donc $f(a) < 0$ pout tout $a \in]0,1[$.
2. Si $g(a) = \operatorname{Arctan} a - \frac{a}{1+a^2}$ alors $g'(a) = \frac{1}{1+a^2} - \frac{1-a^2}{(1+a^2)^2} = \frac{2a^2}{(1+a^2)^2} > 0$. Donc g est strictement croissante et $g(0) = 0$ donc g est strictement positive sur $]0,+\infty[$.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Par la formule du binôme de Newton nous avons $\operatorname{ch}^3 x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3x}+3e^x+3e^{-x}+e^{-3x}\right)$. Et de même $\operatorname{sh}^3 x = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3x}-3e^x+3e^{-x}-e^{-3x}\right)$. Donc $e^{-x}(\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x) = \frac{1}{8}e^{-x}(6e^x+2e^{-3x}) = \frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{-4x}$ qui tend vers $\frac{3}{4}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
2. $x - \ln(\operatorname{ch} x) = x - \ln(\frac{e^x+e^{-x}}{2}) = x - \ln(e^x+e^{-x}) + \ln 2 = x - \ln(e^x(1+e^{-2x})) + \ln 2 = x - x + \ln(1+e^{-2x}) + \ln 2 = \ln(1+e^{-2x}) + \ln 2$. Lorsque $x \to +\infty$, $\ln(1+e^{-2x}) \to 0$ donc $x - \ln(\operatorname{ch} x) \to \ln 2$.

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit $x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

1. $$\operatorname{ch} x = \frac{e^x+\frac{1}{e^x}}{2} = \frac{\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}{2} = \frac{1}{2\sin\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sin(y+\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\cos(y)}.$$
2. De même $\operatorname{sh} x = \tan y$.
3. $\operatorname{th} x = \sin y$.

Ce sont des formules classiques utiles à connaître.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Si f existe alors pour $x=1$ on a $f(\operatorname{ch} 1) = e$ et pour $x=-1$ on a $f(\operatorname{ch} -1) = f(\operatorname{ch} 1) = 1/e$. Une fonction ne peut prendre deux valeurs différentes au même point (ici $t = \operatorname{ch} 1$).
2. Notons $X = e^x$, l'équation devient
$$f(X) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(X+\frac{1}{X}).$$
Comme la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$, alors l'unique façon de définir f sur $]0,+\infty[$ est par la formule $f(t) = \frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})$.
3. Comme e^x est toujours non nul, alors f peut prendre n'importe quelle valeur en 0. $f(0) = c \in \mathbb{R}$ et $f(t) = \frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})$ pour $t>0$. Il y a une infinité de solutions. Mais aucune de ces solutions n'est continue car la limite de $f(t)$ quand $t>0$ et $t \to 0$ est $+\infty$.

Correction de l'exercice 9 ▲

$$x^y = y^x \Leftrightarrow e^{y\ln x} = e^{x\ln y} \Leftrightarrow y\ln x = x\ln y \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$$

(la fonction exponentielle est bijective). Etudions la fonction $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $[1,+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2},$$

donc f est croissante sur $[1,e]$ et décroissante sur $[e,+\infty[$. Donc pour $z \in]0, f(e)[=]0, 1/e[$, l'équation $f(x) = z$ a exactement deux solutions, une dans $]1,e[$ et une dans $]e,+\infty[$.
Revenons à l'équation $x^y = y^x$ équivalente à $f(x) = f(y)$. Prenons y un entier, nous allons distinguer trois cas : $y=1$, $y=2$ et $y \geq 3$. Si $y=1$ alors $f(y) = z = 0$ on doit donc résoudre $f(x) = 0$ et alors $x=1$. Si $y=2$ alors il faut résoudre l'équation $f(x) = \frac{\ln 2}{2} \in]0,1/e[$. Alors d'après l'étude précédente, il existe deux solutions une sur $]0,e[$ qui est $x=2$ (!) et une sur $]e,+\infty[$ qui est 4, en effet $\frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 2}{2}$. Nous avons pour l'instant les solutions correspondant à $2^2 = 2^2$ et $2^4 = 4^2$.
Si $y \geq 3$ alors $y > e$ donc il y a une solution x de l'équation $f(x) = f(y)$ dans $]e,+\infty[$ qui est $x=y$, et une solution x dans l'intervalle $]1,e[$. Mais comme x est un entier alors $x=2$ (c'est le seul entier appartenant à $]1,e[$) c'est un cas que nous avons déjà étudié conduisant à $4^2 = 2^4$.
Conclusion : les couples d'entiers qui vérifient l'équation $x^y = y^x$ sont les couples $(x, y=x)$ et les couples $(2,4)$ et $(4,2)$.