ESPACES VECTORIELS NORMÉS ET APPLICATIONS

PC*2

1 avril 2002

Table des matières

1 Suites dans un espace normé

1. Déterminer les endomorphismes de corps de $\mathbf{R}$.
2. Prouver que si λ est un complexe de module strictement supérieur à 1 et $(\overrightarrow{x_n})$ une suite de vecteurs du $\mathbf{C}$-espace vectoriel normé E de dimension finie, on a l'équivalence :
$$(\overrightarrow{x_n}) \text{ converge } \Leftrightarrow (\overrightarrow{x_n} + \lambda\overrightarrow{x_{n+1}}) \text{ converge}$$
3. Étudier les suites (x_n) et (y_n) définies par
$$x_0 = y_0 = 0 \qquad x_{n+1} = \sqrt{7 - y_n} \quad y_{n+1} = \sqrt{7 + x_n}$$
4. Étudier la suite (x_n) définie par $x_0 > 0, x_1 > 0$ et la récurrence à deux termes :
$$x_{n+2} = (x_n)^{\frac{1}{3}}(x_{n+1})^{\frac{2}{3}}$$

5. Soit $(\overrightarrow{x_n})$ une suite de vecteurs du $\mathbf{C}$-espace vectoriel normé E de dimension finie, qui converge vers $\overrightarrow{a}$, montrer que la suite $(\overrightarrow{u_n})$ de terme général :
$$\overrightarrow{u_n} = \frac{C_n^0\overrightarrow{x_0} + C_n^1\overrightarrow{x_1} + \cdots + C_n^n\overrightarrow{x_n}}{2^n}$$
converge aussi vers $\overrightarrow{a}$. Étudier la réciproque.
6. a, b sont des réels donnés. Étudier la convergence de la suite $(\overrightarrow{x_n})$ de vecteurs du $\mathbf{R}$ espace vectoriel normé E définie par $\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}$ et la récurrence :
$$\overrightarrow{x_{n+2}} = a\overrightarrow{x_n} + b\overrightarrow{x_{n+1}}$$
7. Soit $(\overrightarrow{x_n})$ une suite bornée de vecteurs de $\mathbf{R}$ espace vectoriel normé E telle que la suite $(\overrightarrow{x_n} + \frac{1}{2}\overrightarrow{x_{2n}})$ tend vers $\overrightarrow{0}$.Montrer que $(\overrightarrow{x_n})$ tend vers $\overrightarrow{0}$.
8. (X) Soit (u_n) la suite de réels définie récursivement par :
$$u_0 > 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{u_n}}{n+1}$$
   (a) Prouver l'existence d'un réel $c > 0$ tel que :
$$\begin{cases} u_n \to +\infty \text{ et } u_n \text{ croît} & \text{si } u_0 > c \\ u_n \to 0 & \text{si } u_0 < c \end{cases}$$
   (b) Que dire si $u_0 = c$?
   (c) Soit g_n telle que $u_n = g_n(u_{n+1})$. On pose :
$$f_n = g_0 \circ g_1 \circ \cdots \circ g_n$$
   et α_n la plus grande racine de $g_n(x) = x$. Démontrer que $c = \lim f_n(\alpha_n)$.

2 Propriétés générales

9. (Mines 2001) Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$. Pour $f \in E$ et $0 \leq \alpha \leq 1$, on pose :
$$N_\alpha(f) = \int_0^\alpha |f(x)|\,\mathrm{d}x + \sup_{x\in[\alpha,1]} |f(x)|$$

(a) Montrer que c'est une norme sur E.

(b) Comparer les N_α entre elles. Sont-elles équivalentes ?

(c) Soit $f \in E$ fixée. La fonction $\alpha \mapsto N_\alpha(f)$ est-elle continue ?

10. (X) Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles qui tendent vers $+\infty$. On suppose que $u_{n+1} - u_n \to 0$. Montrer que

$$A = \{u_n - v_m,\ n, m \in \mathbf{N}\}$$

est dense dans $\mathbf{R}$.

11. (1995) On considère :

$$A = \left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{q^2},\ p, q \in \mathbf{N}^*\right\} \text{ et } B = A \cup \{0\} \cup \left\{\frac{1}{p},\ p \in \mathbf{N}^*\right\}$$

(a) Montrer que, si (u_n) est une suite d'éléments de A qui converge vers l alors $l \in B$.

(b) Montrer que tout élément de B est limite d'une suite d'éléments de A.

12. Trouver les points adhérents des parties de $\mathbf{R}$ définies par :

$$A = \left\{\frac{p+q}{p+q+1}\ ,\ (p, q) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}\right\}$$

$$B = \left\{\frac{p^3+q}{p+q^2}\ ,\ (p, q) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*\right\}$$

13. (1995) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $P(f)$ l'ensemble de ses périodes.
    - Montrer que $P(f)$ est un sous groupe fermé de $(\mathbf{R}, +)$.
    - On suppose que 1 et $\sqrt{2}$ appartiennent à $P(f)$, que dire de $(\sqrt{2}-1)^n$? Que dire de f ?

14. Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E, de dimension finie, non vide et bornée. Montrer que $\bar{A}$ est bornée et comparer $\delta(A)$ et $\delta(\bar{A})$.

15. (1995) Soit E le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des suites complexes bornées. Si $X = (x_n) \in E$, on note :

$$N(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n} \text{ et } N'(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n|}{n!}$$

Montrer qu'il s'agit de normes sur E, sont elles équivalentes ?

16. (Cen 99) Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.

$$\Gamma_\alpha = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ x^2 + 2\alpha xy + y^2 - 1 = 0\}$$

Est-ce toujours un fermé non vide ? Est-ce compact ?

17. (a) Soit $(E, || \ ||)$ un espace vectoriel normé de dimension finie,F un fermé non vide de E . Si $\overrightarrow{x} \in E$,montrer qu'il existe $\overrightarrow{f} \in F$ tel que $d(\overrightarrow{x}, F) = ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{f}||$ *(On pourra d'abord étudier le cas où F est borné).*

 (b) $(E, || \ ||)$ n'est plus de dimension finie . F est un sous espace de dimension finie de E . Prouver l'existence d'un vecteur $\overrightarrow{k}$ de norme 1 tel que :

$$\forall \overrightarrow{f} \in F \ , \ ||\overrightarrow{k} - \overrightarrow{f}|| \geq 1$$

 (c) E est maintenant l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ muni de la norme $|| \ ||_\infty$. On pose,pour $n \in \mathbf{N}$ $f_n(x) = x^n$ et on définit une fonction f par :

$$\begin{cases} f(x) = -1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f(x) = 2(x-1) & \text{si} \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

 Montrer que $F = \{f_n \ , \ n \in \mathbf{N}\}$ est un fermé borné de E mais que $d(f, F)$ n'est pas atteinte .

18. Soit Ω un ouvert non vide, borné de E, $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. On suppose que, pour tout couple $(x,y) \in \Omega^2$, il existe une boule B telle que $\{x,y\} \subset B \subset \Omega$. Prouver que Ω est une boule ouverte.

19. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On pose :

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \ , \ x \in \mathbf{R}\}$$

Prouver que si f est bornée, f est continue si et seulement si Γ_f est un fermé de $\mathbf{R}^2$ pour sa topologie usuelle. Est-ce encore vrai si l'on ne suppose plus que f est bornée ?

20. Soient E et F deux espaces vectoriels normés et f, g deux applications de E dans F qui coïncident sur une partie dense de E,prouver que $f = g$.Trouver toutes les applications continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbf{R} \ , \ f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y))$$

21. (1996) Trouver les f continues de $[0,1] \to [0,1]$ telles que $f \circ f = f$.
22. Montrer que l'ensemble A' des points d'accumulation d'une partie A d'un espace vectoriel normé E est un fermé de E.
23. Quels sont les réels θ tels que la suite $(\mathrm{e}^{ni\theta})$ converge ?
24. Soit a un irrationnel. Montrer que $\mathbf{N}a + \mathbf{Z}$ est dense dans $\mathbf{R}$.
25. Soit (u_n) une suite strictement croissante de réels telle que $\lim_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$. Étudier l'ensemble des points adhérents à l'ensemble :
$$\{u_n - [u_n]\ ,\ n \in \mathbf{N}\}$$
*En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, il existe un carré dont l'écriture décimale commence par les chiffres de n.
26. Si $P \in \mathbf{R}_n[X]$,on note $||P||$ la somme des valeurs absolues des coefficients de P.
    (a) Montrer qu'on définit ainsi une norme sur $\mathbf{R}_n[X]$.
    (b) Soit $a \in \mathbf{R}$, on considère la forme linéaire L définie sur $\mathbf{R}_n[X]$ par $P \mapsto P(a)$. Préciser $|||L|||$.
    (c) Soit P un polynôme unitaire non constant, a une racine de P, montrer que $|a| \leq ||P||$. En déduire que l'ensemble E_n des polynômes unitaires de degré n admettant au moins une racine réelle est fermé dans $\mathbf{R}_n[X]$.
    (d) Même question avec l'ensemble des polynômes unitaires scindés sur $\mathbf{R}$.
    (e) Que dire de l'ensemble des polynômes non nuls de $\mathbf{R}_n[X]$ admettant n racines réelles distinctes ?
    (f) (Ensp) Que dire de l'ensemble des polynômes de degré n de $\mathbf{R}_n[X]$ qui restent > 0 sur $\mathbf{R}$?
27. Soit K une partie compacte et F une partie fermée d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. Montrer que $F + K$ est fermée. Est-ce encore vrai si l'on suppose seulement K fermée ?
28. Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E.
    (a) Prouver que
$$d(\overrightarrow{x}, A) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} \in \bar{A}$$

(b) Si B est une autre partie non vide de E telle que $\bar{A}\cap B = \bar{B}\cap A = \emptyset$,prouver l'existence de deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

(c) Soit F et F' deux fermés non vides de E,justifier l'existence de

$$\inf_{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})\in F\times F'} d(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})$$

noté $d(F,F')$.Que dire de F et F' si $d(F,F')=0$? Et si F ou F' est compacte ?

(d) Soit $(E,||\ \ ||)$ un espace vectoriel normé,K un compact non vide de E et $f : K \to K$ telle que :

$$\forall \overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\in K\ ,\ \overrightarrow{x}\neq\overrightarrow{y} \Rightarrow ||f(\overrightarrow{x})-f(\overrightarrow{y})|| < ||\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}||$$

Montrer que f possède un unique point fixe.

29. (Ensp) Soit X un compact de $\mathbf{R}^n$ et $f : X \to X$ continue.

(a) Donner un exemple de f sans point fixe et un exemple où f a une orbite périodique.

(b) On note $R(f)$ l'ensemble des $x \in \mathbf{R}^n$ tels que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier N et une suite $(x_0, x_1, \ldots, x_N)$ de points de X tels que :

$$x_0 = x_n = x \text{ et } \forall i \in \{0,1,\ldots,N-1\},\ d(f(x_i),x_{i+1}) < \epsilon$$

Montrer que $R(f)$ est non vide et compact.

30. (X 2000) Soit K un compact de $\mathbf{R}^n$ et $f : K \to K$ continue. On suppose que la suite (x_n) d'éléments de K définie par $x_0 \in K$ et la récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ possède p valeurs d'adhérence.

(a) Montrer que f stabilise l'ensemble X des valeurs d'adhérence de (x_n).

(b) Montrer que f induit une bijection de X sur lui même.

(c) Soit U un ouvet de $\mathbf{R}^n$ contenant X. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $x_n \in U \cap K$.

(d) Montrer que, pour $0 \leq i \leq p-1$, les suites $(x_{i+kp})_{k\in\mathbf{N}}$ convergent.

3 Matrices et endomorphismes

31. (Mines 2001) Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur le réel α pour que la série $\sum_{n\geq 0} \alpha^n A^n$ converge.

32. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{C})$ telle que $\lim A^n = 0$. Que dire de :

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$$

(b) On considère la suite (X_n) de vecteurs définie par X_0 et la récurrence $X_{n+1} = AX_n$; prouver par récurrence sur la taille p de A que, pour une norme quelconque, $|| \quad ||$ sur $\mathcal{M}_p(\mathbf{C})$:

$$||X_n|| = O(n^p \rho^n)$$

En déduire une réciproque à la première question.

(c) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ à coefficients ≥ 0. Quel est le rayon de convergence de la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n x^n$$

(d) Prouver que $\rho(A) \in \mathrm{Sp}(A)$.

33. (1996) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{C})$ telle que la suite (A^n) converge vers L.

(a) Prouver que L est le projecteur d'image $\mathrm{Ker}(A - I_p)$ et de noyau $\mathrm{Im}(A - I_p)$.

(b) Prouver l'existence d'un polynôme P tel que $P(1) \neq 0$ et $L = P(A)$.

34. Démontrer que $A \mapsto \chi_A$ est une application continue de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dans $\mathbf{K}_n[X]$.

35. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. En déduire $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. prouver que si deux matrices complexes sont semblables il en est de même de leurs comatrices .

36. Montrer, par récurrence, que l'ensemble Ω_n des matrices à valeurs propres distinctes est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
37. Prouver que l'ensemble $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes unitaires, de degré n de $\mathbf{R}_n[X]$ qui ont une racine multiple est fermé pour une norme quelconque. En déduire que l'ensemble Ω_n de l'exercice précédent est ouvert puis que c'est l'ensemble des points intérieurs à l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
38. (Cen) Soit E un $\mathbf{R}$ espace vectoriel de dimension finie et (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui converge vers $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que :
$$\forall n \text{ , rg } f_n \leq p$$
Montrer que $\text{rg } f \leq p$. En déduire que la dimension du commutant d'une matrice carrée réelle de taille n est $\geq n$.
39. (Cen) Déterminer l'ensemble des points d'accumulation des ensembles suivants :
$$\left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \ / \ A^2 = A\right\}$$
$$\left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \ / \ A^2 = I_n\right\}$$
40. (Ensp) Soit p une semi norme non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que :
$$\forall A, B, \ p(AB) \leq p(A)p(B)$$
Montrer que p est une norme.
41. (Ensl)
    (a) Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est nilpotente si et seulement s'il existe une suite (A_n) de matrices semblables à A telle que $\lim A_n = 0$.
    (b) En déduire qu'il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ invariante par similitude (des matrices).
    (c) Déterminer les semi normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ invariantes par similitude des matrices.
42. Expliciter les normes d'endomorphismes sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ subordonnées à la norme $|| \quad ||_\infty$ et à la norme $|| \quad ||_2$ sur $\mathbf{R}^n$. Soit A une isométrie de $\mathbf{R}^n$ pour la norme $|| \quad ||_\infty$. Prouver que :
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \ A(e_1) = \epsilon_i e_{s(i)}$$
où (e) est la base canonique de $\mathbf{R}^n$, s est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ et $\epsilon_i = \pm 1$.

43. (Ensp) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle qu'existe une suite strictement croissante (q_p) d'entiers naturels vérifiant :

$$\lim A^{q_p} = I_n \text{ et } \forall p,\ A^{q_p} \neq I_n$$

Montrer que A est diagonalisable et que pour tout entier p, $A^p \neq I_n$.

44. (Ensp) Caractériser les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que l'ensemble :

$$\{\mathrm{e}^{k\,A}, k \in \mathbf{N}\}$$

soit fini.

45. (1995) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme : $||M|| = \max |m_{ij}|$. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ est compact.
    - Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, montrer que $\inf_{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})} ||\Omega - M||$ est atteint.
    - Montrer que $\inf_{S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})} ||S - M||$ est atteint.

46. (1995) Soit (A_p) une suite de matrices orthogonales. Prouver que :

$$\lim A_p = I_n \iff \lim(A_p + A_p^{-1}) = 2I_n$$

47. (Ensp)
    (a) Montrer que l'application $A \mapsto \chi_A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$ est continue *[Commencer par le déterminant]*.
    (b) Soit (A_k) une suite de matrices qui converge vers A. On suppose que χ_A ne s'annule pas sur le cercle de centre 0 et de rayon r ; prouver qu'à partir d'un certain rang K il en est de même de χ_{A_k}.
    (c) *[Difficile]* Prouver que, pour $k > K$ le nombre de zéros de χ_A et de χ_{A_k} dans le disque de centre 0 et de rayon r est le même.