



Les complexes

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
 I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 **IT

Calculer de deux façons les racines carrées de $1 + i$ et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

[Correction ▼](#)

[005119]

Exercice 2 **T

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

1. $z^2 + z + 1 = 0$
2. $2z^2 + 2z + 1 = 0$
3. $z^2 - 2z \cos \theta + 1 = 0$, θ réel donné.
4. $z^2 - (6 + i)z + (11 + 13i) = 0$
5. $2z^2 - (7 + 3i)z + (2 + 4i) = 0$.

[Correction ▼](#)

[005120]

Exercice 3 **IT Une construction du pentagone régulier à la règle et au compas

1. On pose $z = e^{2i\pi/5}$ puis $a = z + z^4$ et $b = z^2 + z^3$. Déterminer une équation du second degré dont les solutions sont a et b et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
2. Le cercle de centre Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$ passant par le point M d'affixe i recoupe (Ox) en deux points I et J . Montrer que $\overline{OI} + \overline{OJ} = \overline{OI} \cdot \overline{OJ} = -1$ et en déduire une construction à la règle et au compas, du pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1 dont un des sommets est le point d'affixe 1.
3. La diagonale $[AC]$ d'un pentagone régulier $(ABCDE)$ est recoupée par deux autres diagonales en deux points F et G . Calculer les rapports $\frac{AF}{AC}$ et $\frac{FG}{AF}$.

[Correction ▼](#)

[005121]

Exercice 4 ***

Soit $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ donné. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha}$.

[Correction ▼](#)

[005122]

Exercice 5 ****

1. Soit (ABC) un triangle dont les longueurs des côtés BC , CA et AB sont notées respectivement a , b et c . Soit I le centre du cercle inscrit au triangle (ABC) . Montrer que $I = \text{bar}\{A(a), B(b), C(c)\}$.
2. Déterminer z complexe tel que O soit le centre du cercle inscrit au triangle (PQR) dont les sommets ont pour affixes respectives z , z^2 et z^3 .

Exercice 6 ***I

Soient A, B et C trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c . Montrer que :

$$\begin{aligned} ABC \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow j \text{ ou } j^2 \text{ est racine de l'équation } az^2 + bz + c = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc \Leftrightarrow \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} = 0. \end{aligned}$$

Correction ▼

[005124]

Exercice 7 **T

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0$.

Correction ▼

[005125]

Exercice 8 **

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(z^2 + 1)^n - (z - 1)^{2n} = 0$.

Correction ▼

[005126]

Exercice 9 **I

Déterminer les complexes z tels que $z, \frac{1}{z}$ et $z - 1$ aient même module.

Correction ▼

[005127]

Exercice 10 **I

On note U l'ensemble des nombres complexes de module 1. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, (z \in U \setminus \{-1\}) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} / z = \frac{1 + ix}{1 - ix}.$$

Correction ▼

[005128]

Exercice 11 **IT

Forme trigonométrique de $\frac{1 + \cos \theta - i \sin \theta}{1 - \cos \theta + i \sin \theta}$ et de $\frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}$.

Correction ▼

[005129]

Exercice 12 *T

Calculer $(1 + i\sqrt{3})^9$.

Correction ▼

[005130]

Exercice 13 **T

Déterminer les racines quatrièmes de i et les racines sixièmes de $\frac{-4}{1 + i\sqrt{3}}$.

Correction ▼

[005131]

Exercice 14 ***

Montrer que les solutions de l'équation $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} - nz^n = 0$ sont de module inférieur ou égal à 1.

Correction ▼

[005132]

Exercice 15 **T

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on pose $Z = \frac{1+z}{1-z}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixes z tels que

1. $|Z| = 1$.
2. $|Z| = 2$.

3. $Z \in \mathbb{R}$.

4. $Z \in i\mathbb{R}$.

[Correction ▼](#)

[005133]

Exercice 16 *T

Nature et éléments caractéristiques de la transformation d'expression complexe :

1. $z' = z + 3 - i$

2. $z' = 2z + 3$

3. $z' = iz + 1$

4. $z' = (1 - i)z + 2 + i$

[Correction ▼](#)

[005134]

Exercice 17 **I

On considère l'équation $(E) : (z - 1)^n - (z + 1)^n = 0$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 donné.

1. Montrer que les solutions de (E) sont imaginaires pures.
2. Montrer que les solutions de (E) sont deux à deux opposées.
3. Résoudre (E) .

[Correction ▼](#)

[005135]

Exercice 18 ***T ESIM 1993

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$, $\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ et $\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$.

1. Quels sont les nombres complexes z pour lesquels $\operatorname{th} z$ existe ?
2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $\operatorname{th} z = 0$.
3. Résoudre dans \mathbb{C} le système
$$\begin{cases} |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2} \\ |\operatorname{th} z| < 1 \end{cases}.$$
4. Montrer que la fonction th réalise une bijection de $\Delta = \{z \in \mathbb{C} / |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{4}\}$ sur $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$.

[Correction ▼](#)

[005136]

Correction de l'exercice 1 ▲

D'abord on a $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Les racines carrées de $1+i$ dans \mathbb{C} sont donc $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$ et $-\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$. On a aussi, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x+iy)^2 = 1+i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}+1) \\ y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1) \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) \in \left\{ \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \right) \right\}.$$

Les racines carrées de $1+i$ sont donc aussi $\pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \right)$. Puisque $\operatorname{Re}(e^{i\pi/8}) = \cos \frac{\pi}{8} > 0$, on obtient

$$\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}, \text{ ou encore}$$

$$e^{i\pi/8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}} \right)$$

et donc, par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \text{ et } \sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

- $z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$ ou $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = j^2$.
- $\Delta' = 1^2 - 2 = -1 = i^2$. L'équation a donc deux solutions non réelles et conjuguées, à savoir $z_1 = \frac{1}{2}(-1+i)$ et $z_2 = \frac{1}{2}(-1-i)$.
- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout complexe z , on a

$$\begin{aligned} z^2 - 2z \cos \theta + 1 &= (z - \cos \theta)^2 + 1 - \cos^2 \theta = (z - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = (z - \cos \theta)^2 - (i \sin \theta)^2 \\ &= (z - \cos \theta - i \sin \theta)(z - \cos \theta + i \sin \theta) = (z - e^{i\theta})(z - e^{-i\theta}) \end{aligned}$$

L'équation proposée a donc deux solutions (pas nécessairement distinctes) $z_1 = e^{i\theta}$ et $z_2 = e^{-i\theta}$. De plus, $\Delta' = \cos^2 \theta - 1 = -\sin^2 \theta$ et ces solutions sont distinctes si et seulement si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.

- Soit (E) l'équation $z^2 - (6+i)z + (11+3i) = 0$. Son discriminant est $\Delta = (6+i)^2 - 4(11+3i) = -9 - 40i$. Comme $40 = 2 \times 20 = 2 \times (4 \times 5)$ et que $4^2 - 5^2 = 16 - 25 = -9$, on est en droit de deviner que $\Delta = (4-5i)^2$. L'équation (E) a deux solutions distinctes dans \mathbb{C} à savoir $z_1 = \frac{6+i+4-5i}{2} = 5-2i$ et $z_2 = \frac{6+i-4+5i}{2} = 1+3i$.
- Soit (E) l'équation $2z^2 - (7+3i)z + (2+4i) = 0$. Son discriminant est $\Delta = (7+3i)^2 - 8(2+4i) = 24+10i$. Comme $10 = 2 \times 5 = 2 \times (5 \times 1)$ et que $5^2 - 1^2 = 24$, on est en droit de deviner que $\Delta = (5+i)^2$. L'équation proposée a deux solutions distinctes dans \mathbb{C} à savoir $z_1 = \frac{7+3i+5+i}{4} = 3+i$ et $z_2 = \frac{7+3i-5-i}{4} = \frac{1}{2}(1+i)$.

Correction de l'exercice 3 ▲

- On a $a = 2 \cos \left(\frac{2\pi}{5} \right)$ et $b = 2 \cos \left(\frac{4\pi}{5} \right)$. $1, z, z^2, z^3$ et z^4 sont les cinq racines cinquièmes de 1 dans \mathbb{C} . Par suite, $1+z+z^2+z^3+z^4 = 0$. Mais alors

$$a+b = z+z^2+z^3+z^4 = -1$$

et

$$ab = (z+z^4)(z^2+z^3) = z^3+z^4+z^6+z^7 = z+z^2+z^3+z^4 = -1 \text{ (car } z^5 = 1).$$

a et b sont donc les solutions de l'équation $X^2 + X - 1 = 0$ dont les racines sont $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Enfin, puisque $\frac{2\pi}{5} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $a > 0$. Par suite, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. D'autre part, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ et donc,

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = +\sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

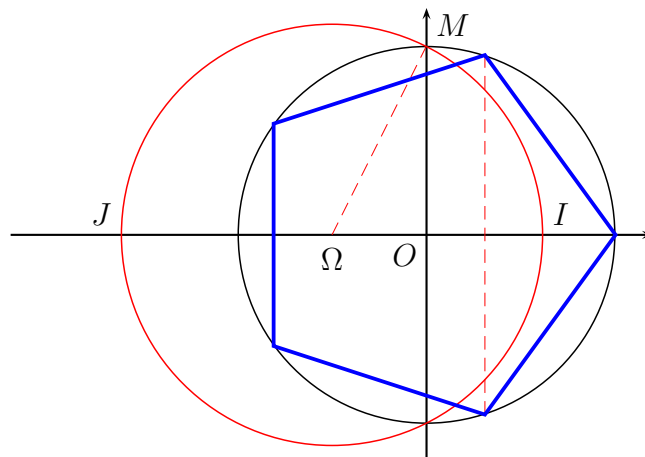
$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

De même, en remplaçant $\sqrt{5}$ par $-\sqrt{5}$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Enfin, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

2. Le rayon du grand cercle vaut, d'après le théorème de PYTHAGORE :

$$R = \sqrt{\Omega O^2 + OM^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Donc $x_I = x_\Omega + R = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_J = x_\Omega - R = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Par suite, $x_I = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $x_J = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$. Ceci montre que les médiatrices des segments $[O, I]$ et $[O, J]$ coupent le cercle de centre O et de rayon 1 en quatre des cinq sommets du pentagone.

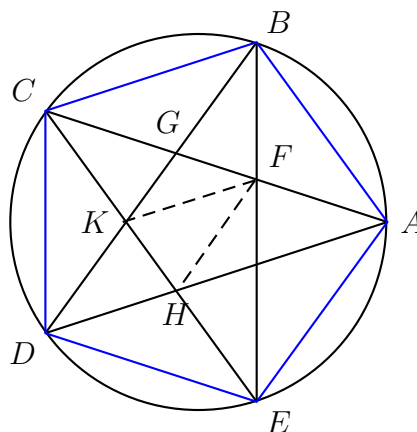


3. Posons $x = \frac{AF}{AC}$. D'après le théorème de THALES (je vous laisse vérifier les parallélismes),

$$x = \frac{AF}{AC} = \frac{HK}{HC} = \frac{FG}{FC} = \frac{AC - 2AF}{AC - AF} = \frac{1 - 2x}{1 - x}.$$

Donc $x^2 - 3x + 1 = 0$ et puisque $x < 1$, $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Puis

$$\frac{AG}{AC} = \frac{AC - AF}{AC} = 1 - x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \frac{FG}{AF} = \frac{AC - 2AF}{AF} = \frac{1}{x} - 2 = \frac{2}{3-\sqrt{5}} - 2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} - 2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$



Définition du nombre d'or.



On veut que C partage le segment $[A, B]$ de telle sorte que $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AB}$ (« $\frac{\text{petit}}{\text{moyen}} = \frac{\text{moyen}}{\text{grand}}$ ») c'est-à-dire, en posant $a = AB$ et $x = AC$, $\frac{x}{a} = \frac{a-x}{x}$ ou encore $(\frac{x}{a})^2 + \frac{x}{a} - 1 = 0$ et donc, puisque $\frac{x}{a} > 0$, $\frac{x}{a} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Le nombre d'or (ou proportion dorée) est le nombre $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0,618\dots$

On peut aussi prendre pour le nombre d'or le rapport $\frac{a}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha} = e^{2i\alpha}$. Donc,

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} \Leftrightarrow \exists k \in \{-1, 0, 1\} / \frac{1+iz}{1-iz} = e^{i(\frac{2\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3})} = \omega_k \Leftrightarrow \exists k \in \{-1, 0, 1\} / i(\omega_k + 1)z = \omega_k - 1.$$

Maintenant, pour $k \in \{-1, 0, 1\}$,

$$\omega_k = -1 \Leftrightarrow \frac{2\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3} \in \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha \in -k\pi + \frac{3\pi}{2} + 3\pi\mathbb{Z},$$

ce qui est exclu pour $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Donc,

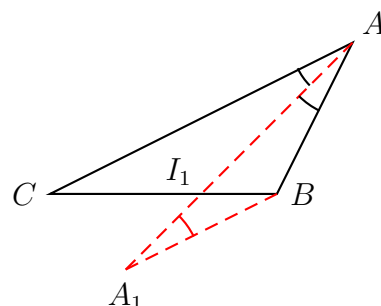
$$\begin{aligned} \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} &\Leftrightarrow \exists k \in \{-1, 0, 1\} / z = \frac{\omega_k - 1}{i(\omega_k + 1)} \Leftrightarrow \exists k \in \{-1, 0, 1\} / z = \frac{e^{i(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3})} - e^{-i(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3})}}{e^{i(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3})} i(e^{i(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3})} + e^{-i(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3})})} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \{-1, 0, 1\} / z = \frac{2i \sin(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3})}{i(2 \cos(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3}))} \Leftrightarrow \exists k \in \{-1, 0, 1\} / z = \tan\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

- On note I_1 le point d'intersection de la bissectrice (Δ_1) de l'angle \widehat{BAC} et de la droite (BC) . La parallèle à (AC) passant par B coupe Δ_1 (puisque (AC) n'est pas parallèle à (Δ_1)) en un point A_1 . Les angles alternes-internes $\widehat{CAA_1}$ et $\widehat{AA_1B}$ sont alors égaux. Puisque d'autre part, $\widehat{CAA_1} = \widehat{A_1AB}$, on en déduit que $\widehat{AA_1B} = \widehat{A_1AB}$ et donc que le triangle (ABA_1) est isocèle en B . D'après le théorème de THALÈS, on a alors

$$\frac{I_1B}{I_1C} = \frac{A_1B}{AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b},$$

et donc puisque I_1 est entre B et C , $b\vec{I_1B} + c\vec{I_1C} = \vec{0}$, ou enfin $I_1 = \text{bar}\{B(b), C(c)\}$.



On a aussi bien sûr les deux autres égalités $I_2 = \text{bar}\{A(a), C(c)\}$ et $I_3 = \text{bar}\{A(a), B(b)\}$ où I_2 et I_3 sont les points d'intersection des deux autres bissectrices avec (AC) et (AB) respectivement. Soit alors $I' = \text{bar}\{A(a), B(b), C(c)\}$. D'après le théorème du barycentre partiel, on a

$$I' = \text{bar}\{A(a), I_1(b+c)\} = \text{bar}\{B(b), I_2(a+c)\} = \text{bar}\{C(c), I_3(a+b)\},$$

ce qui montre que I' est sur (AI_1) , (BI_2) et (CI_3) , c'est-à-dire sur les trois bissectrices. Par suite, $I' = I$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$z, z^2 \text{ et } z^3 \text{ ne sont pas deux à deux distincts} \Leftrightarrow z^2 = z \text{ ou } z^3 = z \text{ ou } z^3 = z^2 \Leftrightarrow z \in \{-1, 0, 1\}.$$

Ensuite, pour $z \notin \{-1, 0, 1\}$,

$$z, z^2 \text{ et } z^3 \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / z^3 - z = \lambda(z^2 - z) \Leftrightarrow \frac{z^3 - z}{z^2 - z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z + 1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

Finalement, (z, z^2, z^3) est un « vrai » triangle si et seulement si z n'est pas réel. Soit alors z un complexe non réel.

O centre du cercle inscrit au triangle $(PQR) \Leftrightarrow O = \text{bar}\{P(QR), Q(PR), R(PQ)\}$

$$\Leftrightarrow z|z^2 - z^3| + z^2|z - z^3| + z^3|z - z^2| = 0 \Leftrightarrow z \cdot |z| \cdot |1 - z|(|z| + z|1 + z| + z^2)$$

$$\Leftrightarrow |z| + z|1 + z| + z^2 = 0 \text{ (E) (car } z \notin \mathbb{R})$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} |z| + z|1 + z| + z^2 = 0 &\Leftrightarrow \left(z + \frac{|z|}{z}\right) + |1 + z| = 0 \Rightarrow z + \frac{|z|}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z + \frac{|z|}{z} = \bar{z} + \frac{|z|}{\bar{z}} \\ &\Leftrightarrow z - \bar{z} - |z| \frac{z - \bar{z}}{z\bar{z}} = 0 \Leftrightarrow (z - \bar{z})\left(1 - \frac{1}{|z|}\right) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{|z|} = 0 \text{ (car } z \neq \bar{z}) \\ &\Leftrightarrow |z| = 1 \end{aligned}$$

Posons donc $z = e^{i\theta}$ où $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. En reportant dans (E), on obtient

$$\begin{aligned} z \text{ solution de (E)} &\Leftrightarrow e^{i\theta} + e^{-i\theta} + |1 + e^{i\theta}| = 0 \Leftrightarrow 2\cos\theta + |e^{i\theta/2}| \cdot |2\cos\frac{\theta}{2}| = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos\theta + |\cos\frac{\theta}{2}| = 0 \Leftrightarrow 2|\cos\frac{\theta}{2}|^2 + |\cos\frac{\theta}{2}| - 1 = 0 \Leftrightarrow |\cos\frac{\theta}{2}| \text{ est solution de l'équation } 2X^2 + X - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| \in \left\{\frac{1}{2}, -1\right\} \Leftrightarrow \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta \in \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow z \in \{j, j^2\} \end{aligned}$$

Les nombres complexes solutions sont donc j et j^2 .

Correction de l'exercice 6 ▲

(A, B, C) équilatéral $\Leftrightarrow C = r_{A, \pi/3}(B)$ ou $C = r_{A, -\pi/3}(B) \Leftrightarrow c - a = (-j^2)(b - a)$ ou $c - a = (-j)(b - a)$

$$\Leftrightarrow (-1 - j^2)a + j^2b + c = 0 \text{ ou } (-1 - j)a + jb + c = 0 \Leftrightarrow ja + j^2b + c = 0 \text{ ou } j^2a + jb + c = 0$$

$$\Leftrightarrow (j^2)^2a + j^2b + c = 0 \text{ ou } j^2a + jb + c = 0 \Leftrightarrow j \text{ ou } j^2 \text{ sont solutions de l'équation } az^2 + bz + c = 0.$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
(A, B, C) \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow ja + j^2b + c = 0 \text{ ou } j^2a + jb + c = 0 \\
&\Leftrightarrow (ja + j^2b + c)(j^2a + jb + c) = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + (j + j^2)(ab + ac + bc) = 0 \\
&\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc,
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
(A, B, C) \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0 \\
&\Leftrightarrow -a^2 + ab + ac - bc - b^2 + bc + ba - ac - c^2 + ca + cb - ab = 0 \\
&\Leftrightarrow (c-a)(a-b) + (a-b)(b-c) + (b-c)(c-a) = 0 \Leftrightarrow \frac{(c-a)(a-b) + (a-b)(b-c) + (b-c)(c-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} = 0.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Le discriminant de l'équation $Z^2 - (5 - 14i)Z - 2(5i + 12) = 0$ vaut

$$\Delta = (5 - 14i)^2 + 8(5i + 12) = -75 - 100i = 25(-3 - 4i) = (5(1 - 2i))^2.$$

Cette équation admet donc les deux solutions $Z_1 = \frac{5-14i+5-10i}{2} = 5 - 12i$ et $Z_2 = \frac{5-14i-5+10i}{2} = -2i$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
z \text{ est solution de l'équation proposée} &\Leftrightarrow z^2 = 5 - 12i = (3 - 2i)^2 \text{ ou } z^2 = -2i = (1 - i)^2 \\
&\Leftrightarrow z = 3 - 2i \text{ ou } z = -3 + 2i \text{ ou } z = 1 - i \text{ ou } z = -1 + i.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

Posons, pour n naturel non nul, $P = (X^2 + 1)^n - (X - 1)^{2n}$.

$$\begin{aligned}
P &= X^{2n} + (\text{termes de degré} \leq 2n - 2) - X^{2n} + 2nX^{2n-1} + (\text{termes de degré} \leq 2n - 2) \\
&= 2nX^{2n-1} + (\text{termes de degré} \leq 2n - 2).
\end{aligned}$$

Donc $\deg(P) = 2n - 1$ et P admet dans \mathbb{C} , $2n - 1$ racines, distinctes ou confondues.

$$\begin{aligned}
(z^2 + 1)^n = (z - 1)^{2n} &\Leftrightarrow \exists k \in \{0, \dots, n - 1\} / z^2 + 1 = \omega_k(z - 1)^2 \text{ où } \omega_k = e^{2ik\pi/n} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \{0, \dots, n - 1\} / (1 - \omega_k)z^2 + 2\omega_kz + (1 - \omega_k) = 0
\end{aligned}$$

Si $k = 0$, l'équation précédente s'écrit $2z = 0$ ou encore $z = 0$. Si k est élément de $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, $\Delta'_k = \omega_k^2 - (1 - \omega_k)^2 = 2\omega_k - 1 = 2e^{2ik\pi/n} - 1$. Soit d_k une racine carrée dans \mathbb{C} de Δ'_k (difficile à expliciter semble-t-il). On a $S = \{0\} \cup \left\{ \frac{-e^{2ik\pi/n} \pm d_k}{1 - e^{2ik\pi/n}}, k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket \right\}$.

Correction de l'exercice 9 ▲

Soient z un complexe non nul, M le point d'affixe z et A le point d'affixe 1.

$$|z| = \left| \frac{1}{z} \right| \Leftrightarrow |z| = \frac{1}{|z|} \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1,$$

et

$$|z| = |z - 1| \Leftrightarrow OM = AM \Leftrightarrow M \in \text{med}[OA] \Leftrightarrow x_M = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{Re}(z) = \frac{1}{2}.$$

Donc,

$$|z| = \left| \frac{1}{z} \right| = |z - 1| \Leftrightarrow |z| = 1 \text{ et } \text{Re}(z) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z = -j \text{ ou } z = -j^2.$$

Correction de l'exercice 10 ▲

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $z = \frac{1+ix}{1-ix}$. Puisque $1-ix \neq 0$, z est bien défini et $|z| = \frac{|1+ix|}{|1-ix|} = \frac{|1+ix|}{|1+ix|} = 1$. Enfin, $z = \frac{-1+ix+2}{1-ix} = -1 + \frac{2}{1-ix} \neq -1$. On a montré que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1+ix}{1-ix} \in U \setminus \{-1\}.$$

Réciproquement, soit $z \in U \setminus \{-1\}$. Il existe un réel $\theta \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Mais alors,

$$z = e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2} (1 + i \tan \frac{\theta}{2})}{\cos \frac{\theta}{2} (1 - i \tan \frac{\theta}{2})} = \frac{1 + i \tan \frac{\theta}{2}}{1 - i \tan \frac{\theta}{2}} \quad (\cos \frac{\theta}{2} \neq 0 \text{ car } \frac{\theta}{2} \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}),$$

et z est bien sous la forme voulue avec $x = \tan \frac{\theta}{2}$.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$1 + \cos \theta + i \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = -1 \text{ et } \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Donc, $\frac{1+\cos\theta-i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta}$ existe pour $\theta \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Pour un tel θ ,

$$\frac{1 + \cos \theta - i \sin \theta}{1 - \cos \theta + i \sin \theta} = \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 2i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2} \cos(\theta/2) - i \sin(\theta/2)}{\sin \frac{\theta}{2} \sin(\theta/2) + i \cos(\theta/2)} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \frac{e^{-i\theta/2}}{e^{i(\pi-\theta)/2}} = -i \cotan \left(\frac{\theta}{2} \right).$$

- **1er cas.** $\cotan \frac{\theta}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\Leftrightarrow \theta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi, \pi + 2k\pi[$. Dans ce cas, la forme trigonométrique de $\frac{1+\cos\theta-i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta}$ est $\cotan(\frac{\theta}{2})e^{-i\pi/2}$ (module = $\cotan(\frac{\theta}{2})$ et argument = $-\frac{\pi}{2}$ (2π)).

$$\frac{1 + \cos \theta - i \sin \theta}{1 - \cos \theta + i \sin \theta} = \left[\cotan \left(\frac{\theta}{2} \right), -\frac{\pi}{2} \right].$$

- **2ème cas.** $\cotan \frac{\theta}{2} < 0 \Leftrightarrow \theta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi[$. Dans ce cas,

$$\frac{1 + \cos \theta - i \sin \theta}{1 - \cos \theta + i \sin \theta} = -\cotan \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot e^{i\pi/2} = |\cotan \left(\frac{\theta}{2} \right)| e^{i\pi/2},$$

et donc,

$$\frac{1 + \cos \theta - i \sin \theta}{1 - \cos \theta + i \sin \theta} = \left[-\cotan \left(\frac{\theta}{2} \right), \frac{\pi}{2} \right].$$

- **3ème cas.** $\cotan \frac{\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow \theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Dans ce cas, on a $\frac{1+\cos\theta-i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta} = 0$.

2. Pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2})} = \frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}} = i\cotan\frac{\theta}{2}.$$

Si $\theta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi, \pi + 2k\pi[$, $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = [\cotan\frac{\theta}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Si $\theta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi[$, $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = [-\cotan\frac{\theta}{2}, -\frac{\pi}{2}]$.

Si $\theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = 0$.

Correction de l'exercice 12 ▲

$$(1+i\sqrt{3})^9 = (2e^{i\pi/3})^9 = 2^9 e^{3i\pi} = -512.$$

La forme algébrique d'un complexe est particulièrement bien adaptée à l'addition.
La forme trigonométrique d'un complexe est particulièrement bien adaptée à la multiplication.

Correction de l'exercice 13 ▲

$i = e^{i\pi/2}$ et les racines quatrièmes de i sont donc les $e^{i(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2})}$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Ensuite, $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-2}{e^{i\pi/3}} = -2e^{-i\pi/3} = 2e^{2i\pi/3}$. Les racines sixièmes de $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$ sont donc les $\sqrt[6]{2}e^{i(\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3})}$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Correction de l'exercice 14 ▲

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$.

$$|1+z+\dots+z^{n-1}| \leq 1+|z|+|z|^2+\dots+|z|^{n-1} < |z|^n+|z|^n+\dots+|z|^n = n|z|^n = |nz^n|,$$

et en particulier, $1+z+\dots+z^{n-1} \neq nz^n$. Donc, si $1+z+\dots+z^{n-1} - nz^n = 0$, alors $|z| \leq 1$.

Correction de l'exercice 15 ▲

A- Solutions algébriques.] Pour $z \in \mathbb{C}$, posons $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1.

$$|Z| = 1 \Leftrightarrow \frac{|1+z|^2}{|1-z|^2} = 1 \Leftrightarrow (1+x)^2 + y^2 = (1-x)^2 + y^2 \text{ et } (x, y) \neq (1, 0) \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

L'ensemble cherché est la droite (Oy) .

2.

$$\begin{aligned} |Z| = 2 &\Leftrightarrow (1+x)^2 + y^2 = 4((1-x)^2 + y^2) \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0 \text{ et } (x, y) \neq (1, 0) \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{10}{3}x + 1 = 0 \text{ et } (x, y) \neq (1, 0) \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9} \text{ et } (x, y) \neq (1, 0) \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}. \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ et de rayon $\frac{4}{3}$.

3.

$$\begin{aligned} Z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow Z = \bar{Z} \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} = \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} \\ &\Leftrightarrow (1+z)(1-\bar{z}) = (1-z)(1+\bar{z}) \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow z - \bar{z} = \bar{z} - z \text{ et } z \neq 1 \\ &\Leftrightarrow z = \bar{z} \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ et } z \neq 1. \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est la droite (Ox) privé du point $(1, 0)$.

4.

$$\begin{aligned} Z \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow Z = -\bar{Z} \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} = -\frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} \Leftrightarrow (1+z)(1-\bar{z}) = -(1-z)(1+\bar{z}) \text{ et } z \neq 1 \\ &\Leftrightarrow 1 - z\bar{z} = -1 + \bar{z} \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \text{ et } z \neq 1. \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est donc le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point $(1,0)$.

B- Solutions géométriques. Soient A et B les points d'affixes respectives -1 et 1 et \mathcal{E} l'ensemble cherché. Soit M un point du plan distinct de B d'affixe z .

1.

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow |z+1| = |z-1| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M \in \text{med}[AB] = (Oy).$$

2. Soit $\Omega = \text{bar}(A(1), B(-4))$. On a $x_\Omega = \frac{-1}{5}(x_A - 4x_B) = \frac{5}{3}$ et $y_\Omega = \frac{-1}{5}(y_A - 4y_B) = 0$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow |z+1|^2 = 4|z-1|^2 \Leftrightarrow AM^2 = 4BM^2 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}^2 - 4\overrightarrow{BM}^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M})^2 - 4(\overrightarrow{B\Omega} + \overrightarrow{\Omega M})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow -3\overrightarrow{\Omega M}^2 + 2(\overrightarrow{A\Omega} - 4\overrightarrow{B\Omega}) \cdot \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{A\Omega}^2 - 4\overrightarrow{B\Omega}^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{1}{3}(\Omega A^2 - 4\Omega B^2) \end{aligned}$$

Or, $\Omega A^2 = (\frac{5}{3} + 1)^2 = \frac{64}{9}$ et $\Omega B^2 = (\frac{5}{3} - 1)^2 = \frac{4}{9}$. Par suite,

$$\frac{1}{3}(\Omega A^2 - 4\Omega B^2) = \frac{1}{3}\left(\frac{64}{9} - \frac{16}{9}\right) = \frac{16}{9}.$$

Ainsi,

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{16}{9} \Leftrightarrow \Omega M = \frac{4}{3},$$

et on retrouve le cercle de centre $\Omega(\frac{5}{3}, 0)$ et de rayon $\frac{4}{3}$.

3.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow z = -1 \text{ ou } \arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 0 \ (\pi) \Leftrightarrow M = A \text{ ou } (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0 \ (\pi) \\ &\Leftrightarrow M \in (AB) \setminus \{B\}. \end{aligned}$$

et on retrouve la droite (Ox) privée du point $(1,0)$.

4.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow z = -1 \text{ ou } \arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{\pi}{2} \ (\pi) \Leftrightarrow M = A \text{ ou } (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} \ (\pi) \\ &\Leftrightarrow M \text{ est sur le cercle de diamètre } [AB] \text{ privé de } B. \end{aligned}$$

et on retrouve le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point $(1,0)$.

Correction de l'exercice 16 ▲

Soit f la transformation considérée.

1. f est la translation de vecteur $\vec{u}(3, -1)$.

2. $\omega = 2\omega + 3 \Leftrightarrow \omega = -3$. f est l'homothétie de rapport 2 et de centre $\Omega(-3, 0)$.

3. $\omega = i\omega + 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}(1+i)$. Comme $i = e^{i\pi/2}$, f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

4. $\omega = (1-i)\omega + 2 + i \Leftrightarrow \omega = 1 - 2i$. Comme $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, f est la similitude de centre $\Omega(1, -2)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 17 ▲

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Soient M, A et B les points d'affixes respectives $z, 1$ et -1 .

$$\begin{aligned} z \text{ solution de } (E) &\Rightarrow (z-1)^n = (z+1)^n \Rightarrow |(z-1)^n| = |(z+1)^n| \Rightarrow |z-1|^n = |z+1|^n \Rightarrow |z-1| = |z+1| \\ &\Rightarrow AM = BM \Rightarrow M \in \text{med}[AB] \Rightarrow M \in (Oy) \Rightarrow z \in i\mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$(-z-1)^n - (-z+1)^n = (-1)^n((z+1)^n - (z-1)^n) = -(-1)^n((z-1)^n - (z+1)^n).$$

Par suite,

$$z \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow (z-1)^n - (z+1)^n = 0 \Leftrightarrow (-z-1)^n - (-z+1)^n = 0 \Leftrightarrow -z \text{ solution de } (E).$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} z \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow (z-1)^n = (z+1)^n \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket / z+1 = e^{2ik\pi/n}(z-1) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket / z = \frac{e^{2ik\pi/n} - 1}{e^{2ik\pi/n} + 1} \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket / z = \frac{e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi/n}}{e^{ik\pi/n} + e^{-ik\pi/n}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket / z = \frac{2i \sin \frac{k\pi}{n}}{2 \cos \frac{k\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket / z = i \cotan \frac{k\pi}{n} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 18 ▲

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. $\text{sh}z$ et $\text{ch}z$ sont définis et donc, $\text{th}z$ existe si et seulement si $\text{ch}z \neq 0$. Or,

$$\text{ch}z = 0 \Leftrightarrow e^z + e^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = -1 \Leftrightarrow e^{2z} = e^{i\pi} \Leftrightarrow 2z \in i\pi + 2i\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow z \in i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right).$$

$\text{th}z$ existe si et seulement si $z \notin i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

2. Soit $z \notin i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

$$\text{th}z = 0 \Leftrightarrow \text{sh}z = 0 \Leftrightarrow e^z = e^{-z} \Leftrightarrow e^{2z} = 1 \Leftrightarrow 2z \in 2i\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow z \in i\pi\mathbb{Z}.$$

Comme $i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \cap i\pi\mathbb{Z} = \emptyset$, $\text{th}z = 0$ si et seulement si $z \in i\pi\mathbb{Z}$.

3. Soit $z \notin i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Posons $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} |\text{th}z| < 1 &\Leftrightarrow |e^z - e^{-z}|^2 < |e^z + e^{-z}|^2 \Leftrightarrow (e^z - e^{-z})(e^{\bar{z}} - e^{-\bar{z}}) < (e^z + e^{-z})(e^{\bar{z}} + e^{-\bar{z}}) \\ &\Leftrightarrow -e^{z-\bar{z}} - e^{-(z-\bar{z})} < e^{z-\bar{z}} + e^{-(z-\bar{z})} \Leftrightarrow 2(e^{2iy} + e^{-2iy}) > 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(2y) > 0 \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{cases} |\text{Im}z| < \frac{\pi}{2} \\ |\text{th}z| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y| < \frac{\pi}{2} \\ \cos(2y) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow |y| < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow z \in \Delta.$$

4. Soit $z \in \Delta$. D'après 1), $\text{th}z$ existe et d'après 3), $|\text{th}z| < 1$. Donc $z \in \Delta \Rightarrow \text{th}z \in U$. Ainsi, th est une application de Δ dans U . Soit alors $Z \in U$ et $z \in \Delta$.

$$\text{th}z = Z \Leftrightarrow \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} = Z \Leftrightarrow e^{2z} = \frac{1+Z}{1-Z}.$$

Puisque $Z \neq -1$, $\frac{1+Z}{1-Z} \neq 0$ et on peut poser $\frac{1+Z}{1-Z} = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$.

Par suite,

$$\begin{aligned} e^{2z} = \frac{1+Z}{1-Z} &\Leftrightarrow e^{2z} = re^{i\theta} \Leftrightarrow e^{2x} = r \text{ et } 2y \in \theta + 2\pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln r \text{ et } y \in \frac{\theta}{2} + \pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Maintenant, on ne peut avoir $\theta = \pi$. Dans le cas contraire, on aurait $\frac{1+Z}{1-Z} = -r \in \mathbb{R}_-^*$ puis $Z = \frac{r+1}{r-1} \in \mathbb{R}$. Par suite, puisque $|Z| < 1$, on aurait $Z \in]-1, 1[$ et donc $\frac{1+Z}{1-Z} \in \mathbb{R}_+^*$ ce qui est une contradiction. Donc, $\theta \in]-\pi, \pi[$ puis $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Mais alors,

$$\begin{cases} \text{th}z = Z \\ z \in \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \ln r \\ y = \frac{\theta}{2} \end{cases}.$$

Ainsi, tout élément Z de U a un et un seul antécédent z dans Δ (à savoir $z = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+Z}{1-Z} \right| + \frac{i}{2} \text{Arg} \left(\frac{1+Z}{1-Z} \right)$ où $\text{Arg} \left(\frac{1+Z}{1-Z} \right)$ désigne l'argument de $\frac{1+Z}{1-Z}$ qui est dans $]-\pi, \pi[$). Finalement, th réalise donc une bijection de Δ sur U .
