TD1 Algèbre linéaire

PC*2

17 septembre 2002

Sauf mention contraire tous les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie sur un corps $\mathbf{K}$ précisé si nécessaire.

1 Exercices généraux

1. (Centrale 98) Soit :
$$E_n = \{P \in \mathbf{C}[X],\ (X^n+1)P(X) = P(X^2)\}$$
   (a) Montrer que c'est un sous espace de $\mathbf{C}[X]$.
   (b) Que dire du degré de $P \in E_n$.
   (c) dimension de E_n et conclusion.
2. (Mines 98 et 99) Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et $(E_i)_{1\leq i\leq p}$ des sous espaces tous différents de E. Prouver que $\bigcup E_i \neq E$.
3. Soit (x) un système de n vecteurs de rang s dont on extrait un système de n' vecteurs de rang s', prouver $n-s \geq n'-s'$.
4. Démontrer par récurrence descendante sur p que deux sous espaces de E de même dimension p ont un supplémentaire commun.
5. (X 2000) Soit $\alpha = \mathrm{e}^{2i\pi/5}$.
$$\mathbf{K} = \{a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3,\ (a,b,c,d) \in \mathbf{Q}^4\}$$
Montrer que $\mathbf{K}$ est un corps.
6. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer que :
$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2 \Leftrightarrow E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$$

Plus généralement, montrer que :
$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2 + \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f)$$

7. $\dim E = n$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{n+1} = 0$, montrer $f^n = 0$.
8. (X 2000) $\dim E = n$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$. Montrer que si F est un sous espace de E non réduit à $\{0\}$ et stable par f alors $\dim f(F) < \dim F$.
Soient $f_1, \ldots, f_n$ n endomorphismes de E tels que $f_i^n = 0$ et qui commutent deux à deux. Montrer que $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n = 0$.
9. (Centrale 98) Soient E, F, G 3 $\mathbf{R}$-espaces vectoriels :
$$u \in \mathcal{L}(E,F) \quad v \in \mathcal{L}(F,G) \quad w = v \circ u$$
   (a) On suppose que w est un isomorphisme. Montrer que v est surjective, u injective et $F = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} v$.
   (b) On suppose satisfaites les trois conditions de la question précédente. w est-il un isomorphisme ?
10. (X 2000) Soient $f\, g \in \mathcal{L}(E)$, montrer que :
$$\dim \operatorname{Ker} g \circ f \leq \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g$$
11. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer que :
$$\dim \operatorname{Ker} u^2 \leq 2 \dim \operatorname{Ker} u$$
12. (Mines 98) Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ telle que $M^2 = 0$. Prouver que $\operatorname{rg}(M) \leq 2$.
13. $\dim E = n$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer que les sous espaces stables par f sont les $\operatorname{Ker} f^k$ pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
14. Montrer que les matrices de rang 1 sont celles de la forme $X\,{}^tY$ où X, Y sont des matrices colonnes non nulles. Donner un résultat analogue pour celles de rang 2.
15. (Centrale 98) Soient E et F deux $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de sous espaces de E. On définit une application ϕ de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\prod_{i=1}^n \mathcal{L}(E_i, F)$ par :
$$h \mapsto (h_{|E_1}, \ldots, h_{|E_n})$$
Prouver que ϕ est injective si et seulement si $E = \sum_{i=1}^n E_i$. A quelle condition est-t-elle surjective ?

16. (Dimension quelconque) Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que pour tout $\overrightarrow{x}$ de E, le système $(f(\overrightarrow{x}), g(\overrightarrow{x}))$ soit lié. Montrer qu'en général *(à préciser)* le système (f, g) est lié dans $\mathcal{L}(E)$.
17. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, E' un sous espace de E, F' un sous espace de F. Montrer les relations :
$$\dim(f(E')) = \dim E' - \dim(E' \cap \operatorname{Ker} f)$$
$$\dim(f^{-1}(F')) = \dim E - \operatorname{rg} f + \dim(F' \cap \operatorname{Im} f)$$
18. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F), g \in \mathcal{L}(F, G), h \in \mathcal{L}(G, H)$. Prouver les relations :
$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} f - \dim(F) \leq \operatorname{rg} g \circ f \leq \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$$
$$\operatorname{rg}(g \circ f) + \operatorname{rg}(h \circ g) \leq \operatorname{rg} g + \operatorname{rg}(h \circ g \circ f)$$
19. $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer les inégalités :
$$|\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g| \leq \operatorname{rg}(f + g) \leq \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$$
20. Prouver que :
$$\operatorname{rg}(f + g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\} \text{ et } E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$$
21. (Dimension quelconque). Prouver que $f \in \mathcal{L}(E)$ commute avec un projecteur p si et seulement si $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par p et qu'il suffit, pour cela, d'avoir :
$$f(y) \in \operatorname{Ker} p \Rightarrow y \in \operatorname{Ker} p \text{ et } f(y) \in \operatorname{Im} p \Rightarrow y \in \operatorname{Im} p$$
22. (Mines 2001, dimension quelconque) Soient p et q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = 0$. Soit $r = p + q - q \circ p$.
    (a) Montrer que r est un projecteur.
    (b) Montrer que :
    $$\operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$$
    $$\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$$
    (c) Montrer que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} q$ sont en somme directe.

23. (Dimension quelconque). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe deux scalaires distincts a et b vérifiant $(f - a\mathrm{Id}) \circ (f - b\mathrm{Id}) = 0$.
    (a) Etablir l'existence de λ et μ tels que $\lambda(f - a\mathrm{Id})$ et $\mu(f - b\mathrm{Id})$ soient des projecteurs.
    (b) Prouver que $\operatorname{Im}(f - b\mathrm{Id}) = \operatorname{Ker}(f - a\mathrm{Id})$.
    (c) Calculer f^n pour $n \in \mathbf{N}$.
    (d) Si $ab \neq 0$, prouver que $f \in \mathrm{GL}(E)$ et calculer f^n pour $n \in \mathbf{Z}$.
24. $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que :
$$f + g = \mathrm{Id} \quad \text{et} \quad \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \leq n = \dim(E)$$
Démontrer que f et g sont des projecteurs tels que $f \circ g = g \circ f = 0$. Généraliser à un nombre fini d'endomorphismes vérifiant des propriétés analogues.
25. Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux sous espaces de $\mathcal{L}(E)$ tels que :
$$\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$$
et
$$\forall (f, g) \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2,\ f \circ g + g \circ f = 0$$
Montrer que $\mathcal{L}_1 = 0$ ou $\mathcal{L}_2 = 0$.
26. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F), v \in \mathcal{L}(F, E)$. Prouver que deux propriétés entrainent la troisième :
$$\begin{array}{rl} i) & u \circ v \circ u = u \\ ii) & v \circ u \circ v = v \\ iii) & \operatorname{rg} u = \operatorname{rg} v \end{array}$$
27. (Mines 2000)Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbf{K}$ et F un sous espace de dimension p. Calculer la dimension de :
$$\mathcal{V} = \{u \in \mathcal{L}(E),\ /\ F \subset \operatorname{Ker} u\}$$
28. Etudier le rang des endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ définis par :
$$v \mapsto v \circ u \quad v \mapsto u \circ v \quad v \mapsto u \circ v \circ u$$
où u est un endomorphisme donné.

29. Soit f une application non constante de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$ telle que, pour tout couple de matrices, on ait :

$$f(A\,B) = f(A)\,f(B)$$

Montrer que $f(A) = 0$ si et seulement si A est singulière.

30. (X 2001) On prend P et Q dans $\mathbf{R}[X]$. $\deg P = a$ et $\deg Q = b$. Montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :

i) Il existe U et V dans $\mathbf{R}[X]$ tels que $U\,P + V\,Q = 1$.

ii) La famille $(P, X\,P, \ldots, X^{b-1}\,P, Q, X\,Q, \ldots, X^{a-1}\,Q)$ est libre.

31. Noyau, image de l'endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$ défini par :

$$P \mapsto (X^4 - 1)\,P(X) \mod X^4 - X$$

32. Soient A et B deux polynômes non constants de $\mathbf{C}[X]$ de degrés respectifs n, m. Etudier le rang de l'application linéaire de $\mathbf{C}_{m-1}[X] \times \mathbf{C}_{n-1}[X]$ dans $\mathbf{K}_{n+m-1}[X]$ définie par :

$$(U, V) \mapsto A\,U + B\,V$$

33. (X 2001) Soient A, B deux matrices carrées de taille n telles que $A + cB$ soit nilpotente pour $n + 1$ valeurs de c, montrer que A et B sont nilpotentes.

34. $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Noyau, image de l'endomorphisme de $\mathbf{R}$ défini par :

$$X \mapsto X + \mathrm{Tr}(A\,X)\,B$$

35. (CCP 99) Calculer A^n avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

36. (CCP 99) Soient A et B des matrices carrées de taille n telles que :

$$A\,B = 0 \quad \text{et} \quad A + B \text{ inversible}$$

Montrer que $\mathrm{rg}\,A + \mathrm{rg}\,B = n$.

37. Quels sont les endomorphismes de E qui commutent avec tous les endomorphismes de E, avec tous les automorphismes de E ?

38. $\dim E = 3$. Trouver les $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f^4 = f^2$.

39. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^2 = -\mathrm{I}_n$. Que vaut $\mathrm{Tr}\ A$?

40. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ contient au moins une matrice inversible.

41. $E = \mathbf{R}_n[X], (a, b) \in \mathbf{N}^2$ tels que $a < b$. Soit f l'endomorphisme de E défini par :

$$P \mapsto X^2 P" - (a + b - 1) X P' + abP$$

Trouver les dimensions de l'image et du noyau de f. En déduire les solutions de

$$X^2 P" - 2X P' + 2P = Q$$

où Q est donné de degré au plus trois en fonction des coefficients de Q ?

42. (X 2000) Soit X une partie finie, non vide, d'un espace vectoriel complexe E telle que $0 \notin X$. Construire une forme linéaire $f \in E^*$ telle que

$$\prod_{x \in X} f(x) \neq 0$$

.

43. Montrer que tout endomorphisme est somme de deux automorphismes.

44. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe $v \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $v \circ u$ soit un projecteur.

45. (Mines 99) Calculer M^2 où $M = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est définie par $a_{i,j} = \mathrm{C}_j^{i-1}$ quand $j \geq i - 1$ et 0 sinon.

46. Toutes les matrices carrées considérées sont de même taille n. Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ est une matrice rectangulaire et M une matrice carrée, on note $A \otimes M$ la matrice bloc :

$$(a_{ij} M)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$$

Prouver que, si les matrices rectangulaires A et B sont multipliables dans le bon ordre :

$$(A \otimes M).(B \otimes \mathrm{I}_n) = AB \otimes M \qquad (A \otimes \mathrm{I}_n).(B \otimes M) = AB \otimes M$$

En déduire le rang de $A \otimes M$ en fonction de ceux de A et M.

47. (CCP 97) Trouver L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure unipotente telle que :
$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=LU$$
48. (CCP et Mines 98) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, $(\phi_i)_{1\leq i\leq p}$ p formes linéaires sur E. Montrer que les (ϕ_i) sont indépendantes si et seulement si $\dim\bigcap_{1\leq i\leq p}\operatorname{Ker}\phi_i=n-p$.
49. (Mines 98) Montrer que le commutant d'une matrice $A\in\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ est un sous espace de dimension 2 ou 4.
50. (Centrale 2000) Soit $\mathcal{N}$ le sous espace de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ engendré par les matrices nilpotentes.
    (a) Montrer que, dans un anneau $(\mathbf{A},+,\times)$, la somme et le produit de deux éléments nilpotents qui commutent est nilpotent.
    (b) Montrer que $E_{ij}\in\mathcal{N}$ pour $i\neq j$.
    (c) Montrer que $E_{ii}-E_{jj}\in\mathcal{N}$.
    (d) Comparer $\mathcal{N}$ et l'ensemble des matrices de trace nulle.
51. (X99) Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui ne contient aucune matrice inversible.
    (a) Montrer que pour toute matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, il existe un unique réel λ_M tel que $M-\lambda_M\mathrm{I}_n\in\mathcal{H}$.
    (b) Montrer que $M\mapsto\lambda_M$ est linéaire.
    (c) Calculer λ_M lorsque M est nilpotente.
    (d) Conclure en utilisant l'exercice 50.

2 Techniques de calcul matriciel

2.1 Calcul de rangs

1. (avec Maple) Etudier le rang des matrices suivantes :
$$\begin{pmatrix}2&-1&3\\-4&m&1\\-2&1&m\\10&-5&-6\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}m-2&-4&2&4\\2&1&m-1&1\\1&2&-3&-2\\-1&m+1&2&-3\end{pmatrix}$$

Etudier le rang de la matrice suivante et donner une relation de liaison entre ses lignes puis entre ses colonnes :
$$\begin{pmatrix}2&-1&1&3&4\\2&-1&2&1&4\\2&-3&1&2&-2\\1&0&1&-2&-6\\4&-1&3&-1&-8\\1&2&1&-1&0\end{pmatrix}$$

2. (avec Maple) Donner une base du sous espace de $\mathbf{R}^4$ engendré par le système de vecteurs dont la matrice, dans la base canonique, est :
$$\begin{pmatrix}2&1&3&3\\-3&2&-1&-1\\4&-1&2&1\\-1&2&-3&-7\end{pmatrix}$$
Meme question dans $\mathbf{R}^5$ avec :
$$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&0&1&2\\1&2&-1&0\\2&1&1&-3\\0&-1&1&1\end{pmatrix}$$
On donnera aussi une base d'un supplémentaire de ce sous espace.
3. Rang des matrices $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$
$$a_{i,j}=(i+j+p)^2\qquad a_{i,j}=\sin(\theta_i+\theta_j)$$
4. (Centrale 98) Rang de la matrice :
$$\begin{pmatrix}1&a&b\\a&1&b\\b&a&1\end{pmatrix}$$

2.2 Systèmes linéaires

5. (avec Maple) Etudier les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x+y+z+t=3 \\ x+my+z-mt=m+2 \\ mx-y-mz-t=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y-mz=1 \\ 2x+my-z=2m^2 \\ mx-y=2m-1 \\ -x+y+z=2m \end{cases}$$

6. (CCP 98) Discuter le système :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=2 \\ a^3x+b^3y+c^3z=1 \end{cases}$$

avec a, b, c racines de $X^3-\lambda X+1-\mu$.

7. Etudier les systèmes suivants :

$$\begin{cases} ay+bz+ct=a+b+c \\ ax+cz+bt=a \\ bx+cy+at=b \\ cx+by+az=c \end{cases} \qquad \begin{cases} ax+by+t=a+b \\ bx+ay+z=a-b \\ y+az+bt=a+1 \\ x+bz+at=a-1 \end{cases}$$

On discutera suivant la position du point (a,b) ou (a,b,c).

8. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$:

$$X+{}^tX=\mathrm{Tr}(X)A$$

9. (TPE 2001) On considère la matrice $A=(\alpha_i-\beta_j)_{1\le i,j\le n}\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
   (a) Étudier son rang.
   (b) Structure et dimension de l'espace des solutions du système $A\,X=Y$ où $Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$?

10. (CCP 99) Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$:

$$X+\mathrm{Tr}(X)\,A=B$$

11. On considère le système non linéaire suivant d'inconnue $(X,Y)\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2$:

$$\begin{cases} XY+YX=0 \\ X^2=Y^2=0 \\ XY\neq 0 \end{cases}$$

   (a) Montrer que, pour $n=2$, le système n'a pas de solution.
   (b) Montrer que, pour $n=2r$, $(r\ge 2)$, il y a une solution telle que $\mathrm{rg}\,X=r$.
   (c) Etudier le cas où n est impair.

12. (CCP 99) Soient $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ et $(b_1,b_2,\dots,b_n)$ deux systèmes de réels. Etudier le système linéaire (S) de n équations à n inconnues dont l'équation d'indice $i\in[|1,n|]$ est :

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{a_i-b_j}=1$$

[Introduire une fraction rationnelle idoine]

2.3 Inversion de matrices

13. (CCP 2000) Inverser $A=[\min(i,j)]_{1\le i,j\le n}$.

14. (Mines 2000, CCP 2001) Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que, pour tout i :

$$|a_{i,i}|>\sum_{j\neq i}|a_{i,j}|$$

Montrer que A est inversible.

15. (CCP 99) Inverser

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

16. Inverser, quand c'est possible :

$$\begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix}$$

17. a, b, c sont les racines de $X^3 - 3X + 1$. Calculer l'inverse de :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

18. Inverse de :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

19. Inverser la matrice $(|i-j|)_{1 \leq i,j \leq n}$.
20. Soient $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbf{C}^*)^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{C}^n$. Inverser, quand c'est possible, la matrice $(m_{i,j})$ définie par $m_{i,j} = b_i$ pour $i \neq j$ et $m_{i,i} = a_i + b_i$.
21. A quelle condition sur A, la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2A & -4A \\ A & -A \end{pmatrix}$$

est-t-elle inversible ?

22. Calculer l'inverse de la matrice $\left[\mathrm{C}_j^i\right]_{0 \leq i,j \leq n}$. On convient que $\mathrm{C}_j^i = 0$ si $j < i$.
23. Inverser la matrice $\left[\frac{1}{i+j}\right]_{1 \leq i,j \leq n}$.