

# SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

PC\*2

13 octobre 2004

## Préface

Les suites et séries de fonctions ont été inventées pour construire des fonctions qui sont solutions de certains problèmes, par exemple d'équations différentielles ou fonctionnelles. On s'est inspiré des méthodes numériques d'approximation qui permettent de prouver l'existence de solutions d'une équation numérique. Voici deux problèmes assez significatifs :

**Exemple 1.** Il existe une et une seule fonction  $\Psi$  de  $]0, +\infty[$  dans  $\mathbf{R}$  qui satisfait aux propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \Psi \text{ est croissante sur } ]0, +\infty[ \\ \Psi(x+1) - \Psi(x) = 1/x \text{ pour tout } x > 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\Psi(x) - \ln(x)) = 0 \end{cases}$$

Elle est donnée, pour  $x > 0$  par :

$$\Psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n - \sum_{k=0}^n \frac{1}{x+k}$$

Cette fonction, utilisée par Maple ainsi que ses dérivées successives, servira à illustrer les résultats de ce cours.

**Exemple 2.** On se donne  $a \in I$  et  $q \in \mathcal{C}(I, \mathbf{K})$ . L'équation différentielle linéaire :

$$y''(x) - q(x)y(x) = 0 \quad \text{avec les conditions } y(a) = \alpha, y'(a) = \beta$$

Admet une unique solution de classe  $\mathcal{C}^2$  sur l'intervalle  $I$ . On peut construire cette solution comme limite, en un sens que l'on précisera, de la suite de fonctions  $(y_n)$  définie par :

$$\begin{cases} y_0(x) = \alpha \\ y_{n+1}(x) = \alpha + \beta(x-a) + \int_a^x (x-t)q(t)y_n(t) dt \end{cases}$$

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>5</b>
1.1	Convergence simple des suites de fonctions . . . . .	5
1.2	Insuffisances de la convergence simple . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Séries de fonctions</b>	<b>7</b>
2.1	Séries alternées de fonctions . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Interversion de symboles</b>	<b>11</b>
3.1	Intégration terme à terme sur un segment . . . . .	11
3.2	Dérivation terme à terme des séries de fonctions $\mathcal{C}^1$ . . . . .	12
3.3	Double limite . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Approximation des fonctions continues</b>	<b>17</b>
4.1	Approximation par des fonctions en escalier . . . . .	17
4.2	Théorèmes de Weierstrass . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Travaux dirigés</b>	<b>19</b>

# Chapitre 1

## Préliminaires

Tous les intervalles sont non réduits à un point. La lettre  $I$  désigne un intervalle,  $J$  ou  $S$  un segment. Les fonctions considérées sont, sauf mention contraire, définies sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ . On note  $\mathcal{B}(I, \mathbf{K})$  le  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel des fonctions bornées de  $I$  dans  $\mathbf{K}$ .

### 1.1 Convergence simple des suites de fonctions

**Définition 1 (Convergence simple).** On dit qu'une suite  $(f_n)$  de fonctions de  $I$  dans  $\mathbf{K}$  converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$  si :

$$\boxed{\forall x \in I, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)}$$

On notera  $f_n \xrightarrow{S} f$ . Comme la limite, si elle existe, d'une suite numérique, est unique, il en est de même de la limite simple, si elle existe, d'une suite de fonctions.

### 1.2 Insuffisances de la convergence simple

**Exemple 3.**  $I = [0, \pi/2]$ ,  $f_n(x) = \cos^n x$ . La suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $I$  vers la fonction  $f$  définie sur  $[0, \pi/2]$  par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x \leq \pi/2 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

**La limite simple d'une suite de fonctions continues sur  $I$  n'est donc pas obligatoirement continue sur  $I$ .**

**Exemple 4.** Soit  $(f_n)_{n \geq 2}$  la suite de fonctions définie sur le segment  $I = [0, 1]$  par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \\ 2n - n^2 x & \text{si } 1/n < x < 2/n \\ 0 & \text{si } 2/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

La suite  $(f_n)$  est une suite de fonctions continues sur  $I$  (pourquoi), on a :

$$\forall x \in I, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

Elle converge donc simplement sur  $I$  vers la fonction nulle. Soit

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = 1$$

La suite  $(I_n)$  ne converge donc pas vers 0 comme on eut pu le penser à tort.

*Question 1.* Citez des propriétés stables par limite simple et des propriétés non stables.

On va développer, **uniquement dans le cadre des séries de fonctions**, une notion de convergence mieux adaptée au passage à la limite de propriétés simples des fonctions  $f_n$ . Les propriétés de la limite simple d'une suite de fonctions s'en déduiront *via* le lien habituel suite-série.

## Chapitre 2

### Séries de fonctions

**Définition 2 (Convergence simple d'une série de fonctions).** Elle est définie comme la convergence simple de la suite  $(S_p)$  de ses sommes partielles. Si la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge simplement sur  $I$ , sa somme, notée  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  est la fonction définie sur  $I$  par :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

**Définition 3 (Norme infinie).** Pour  $f \in \mathcal{B}(I, \mathbf{K})$ , on pose :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

Que l'on notera aussi  $N_{\infty}(f)$ .

*Remarque 1.* Si  $f$  est une fonction de  $I$  dans  $\mathbf{K}$ , et  $a \in [0, +\infty[$ , les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- i)  $\forall x \in I, |f(x)| \leq a.$
- ii)  $f \in \mathcal{B}(I, \mathbf{K})$  et  $N_{\infty}(f) \leq a.$

**Proposition 1.**  $\|\cdot\|_{\infty}$  est une norme sur  $\mathcal{B}(I, \mathbf{K})$ .

**Définition 4 (Convergence normale).** Si  $\sum N_{\infty}(u_n)$  converge ou encore s'il existe une suite  $(a_n)$  de réels positifs telle que la série  $\sum a_n$  converge et :

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbf{N}, |u_n(x)| \leq a_n$$

**Proposition 2.** Si la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge normalement sur  $I$ , alors pour tout  $x \in I$ , la série  $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$  converge absolument ; la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge donc simplement sur  $I$ .

*Remarque 2.* En pratique, pour prouver la convergence normale d'une série de fonctions, on essaie de calculer, ou, à défaut de majorer,  $N_{\infty}(u_n)$  en étudiant les variations de  $u_n$  sur  $I$ .

*Exercice 1.* Exhiber une série de fonctions bornées, absolument convergente sur un intervalle  $I$ , mais qui ne converge pas normalement sur  $I$ .

**Théorème 1 (Continuité de la somme d'une série normalement convergente de fonctions continues).** Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série de fonctions normalement convergente sur tout segment d'un intervalle  $I$ . Si, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n$  est continue sur  $I$  alors  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  aussi.

**Exemple 5.** La fonction  $\Psi$  définie dans le préambule est continue sur  $]0, +\infty[$ .

**Exemple 6.** Étude, sur  $\mathbf{R}$ , de la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$  avec :

$$u_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^2}$$

On étudiera les propriétés suivantes : Convergence simple, continuité de la somme, équivalent de la somme en  $+\infty$  et en 0.

*Exercice 2.* Montrer que la série de fonctions

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

converge simplement sur  $\mathbf{R}$ . Sa somme y est-elle continue ?

**Exemple 7 (Exemple important).** Soit  $\alpha > 0$  un réel et  $u_n(x)$  définie sur  $\mathbf{R}_+$  par :

$$u_n(x) = n^2 x^{\alpha} e^{-nx^2}$$

1. Convergence simple et normale de la série  $\sum u_n$  sur  $[0, +\infty[$ .
2. Domaine de continuité de la somme  $U$  ?
3. Étude de la somme au voisinage de 0.

*Démonstration.* -

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 u_n(x) = 0$  donc la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge simplement sur  $\mathbf{R}_+$ .  
Pour étudier sa convergence normale, on examine les variations de  $u_n$  et l'on trouve :

$$N_\infty(u_n) = u_n \left( \sqrt{\frac{\alpha}{2n}} \right) = \left( \frac{\alpha}{2} \right)^{\alpha/2} e^{-\alpha/2} n^{2-\alpha/2}$$

La série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge donc normalement sur  $[0, +\infty[$  pour  $\alpha > 6$ .

2. Si  $\delta > 0$ ,  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge normalement sur  $[\delta, +\infty[$ ; donc la série converge normalement sur tout segment de  $]0, +\infty[$ . Sa somme est donc continue sur  $]0, +\infty[$ .
3. Comportement au voisinage de 0. Pour  $\alpha > 6$ ,  $\sum u_n$  converge normalement sur  $\mathbf{R}_+$ ; sa somme est donc continue sur  $\mathbf{R}_+$ .  
Pour  $0 < \alpha \leq 6$ , on cherche un équivalent au voisinage de 0 de :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-nx^2}$$

On utilise une technique de comparaison série, intégrale un peu plus compliquée que d'habitude qui amène :

$$f(x) \sim \int_0^{+\infty} t^2 e^{-tx^2} dt = 2x^{-6}$$

et donc

$$U(x) \sim 2x^{\alpha-6} \rightarrow +\infty$$

□

*Exercice 3.* Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues et bornées sur un intervalle  $I$ . On suppose qu'existe une fonction  $f$  bornée sur  $I$  telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

1. Montrer qu'existe une suite  $(n_k)$  strictement croissante d'entiers naturels telle que :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_\infty \leq \frac{1}{2^k}$$

2. Prouver que  $f$  est continue sur  $I$ .

## 2.1 Séries alternées de fonctions

Traisons un exemple standard.

**Exemple 8.** La série de fonctions

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} e^{-nx}}{\sqrt{n}}$$

converge simplement mais ne converge pas normalement sur  $[0, +\infty[$ . Sa somme  $f(x)$  est continue sur cette intervalle.

*Démonstration.* Soit  $\alpha > 0$ , la série converge normalement sur  $[\alpha, +\infty[$  puisque, sur cet intervalle :

$$\left| \frac{(-1)^{n-1} e^{-nx}}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{e^{-n\alpha}}{\sqrt{n}}$$

Pour  $x = 0$  c'est une série alternée. D'où la convergence simple de la série sur  $[0, +\infty[$ . Cependant la convergence n'est pas normale puisque :

$$\sup_{x \geq 0} \left| \frac{(-1)^{n-1} e^{-nx}}{\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

et que la série de terme général  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  diverge. Pour prouver la continuité de la somme sur  $[0, +\infty[$ , on peut soit procéder à un regroupement de deux termes consécutifs, soit accélérer la convergence de la suite des sommes partielles. □

*Exercice 4.* Quel est le domaine de définition  $\Omega$  de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} ?$$

Étudier la Continuité de  $f$  sur  $\Omega$ , et en déterminer un équivalent en 0 et en  $+\infty$ .

## Chapitre 3

### Interversion de symboles

#### 3.1 Intégration terme à terme sur un segment

**Théorème 2 (Intégration terme à terme sur un segment).** Soit  $(u_n)$  une suite de fonctions continues sur  $[a, b]$  telle que la série de fonctions de terme général  $u_n$  converge normalement sur  $[a, b]$ . On sait qu'alors la somme  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  est continue par sur  $[a, b]$ . La série  $\sum_{n \geq 0} \int_a^b u_n(x) dx$  converge et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) dx$$

Exercice 5. Exprimer comme somme d'une série l'intégrale :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\sin x} dx$$

Exercice 6. Prouver l'égalité :

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$$

**Exemple 9.** (Preuve de l'existence d'une solution d'équation différentielle)

1. Prouver l'existence d'un plus grand réel  $a > 0$  tel qu'il existe  $M > 0$  vérifiant :

$$e^{Ma} - 1 = M^2$$

2. On définit une suite  $(y_n)$  de fonctions sur  $[0, a]$  par :

$$y_0 = 0, y_{n+1}(x) = \int_0^x e^{ty_n(t)} dt$$

Prouver que  $0 \leq y_n \leq M$  et que la suite  $(y_n)$  converge simplement vers une fonction  $y$  sur  $[0, a]$ .

3. Montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $n \geq 1$  et pour tout  $x \in [0, a]$  :

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq C \int_0^x |y_n(t) - y_{n-1}(t)| dt$$

4. Prouver que  $y \in \mathcal{C}^1([0, a], \mathbf{R})$  et :

$$y(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [0, a], y'(x) = e^{xy(x)}$$

#### 3.2 Dérivation terme à terme des séries de fonctions $\mathcal{C}^1$

**Théorème 3 (Dérivation terme à terme des séries de fonctions).** Soit  $(u_n)$  une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $I$ . On suppose :

- i) La série de fonctions de terme général  $u'_n$  converge normalement sur tout segment de  $I$ .
- ii) La série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge simplement sur  $I$ .

Alors la fonction  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et :

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n \quad (\text{dérivation terme à terme})$$

**Théorème 4 (Cas des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ ).** Soit  $(u_n)$  une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  ( $1 \leq k < \infty$ ) sur un intervalle  $I$ . On suppose :

- i) La série de fonctions de terme général  $u_n$  converge simplement sur  $I$ .
- ii) Pour tout entier naturel  $i \in [1, k]$ , la série  $\sum_{n \geq 0} u_n^{(i)}$  converge normalement sur tout segment de  $I$ .

Alors la fonction  $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  et :

$$\frac{d^k}{dx^k} \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(k)} \quad (\text{dérivation } k \text{ fois terme à terme})$$

**Exemple 10.** La fonction  $\Psi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ . Expliquer le calcul Maple suivant :

$$\sum_{n=1}^{N+1} \frac{n+1}{(3n+1)(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \Psi\left(1, N + \frac{3}{2}\right) - 2\Psi\left(N + \frac{3}{2}\right) + 2\Psi\left(N + \frac{4}{3}\right) - 1 - \frac{\pi^2}{8} - 4 \ln 2 + \frac{1}{3\pi\sqrt{3}} + 3 \ln 3$$

Avec  $\Psi(n, x) = \Psi^{(n)}(x)$ .

En déduire :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(3n+1)(2n+1)^2} = -1 - 1/8 \pi^2 - 4 \ln(2) + 1/3 \pi \sqrt{3} + 3 \ln(3)$$

**Exemple 11 (Fonction Gamma d'Euler).** La suite  $(g_n)_{n \geq 1}$  de fonctions définies sur  $I = ]0, +\infty[$  par :

$$g_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}$$

converge simplement sur  $I$  vers une fonction continue, strictement positive, notée  $\Gamma$ . Prouver que  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et calculer sa dérivée logarithmique.

*Démonstration.*  $g_n(x) > 0$  pour  $x \in I$  et  $n \geq 1$ , comme elle est définie par un produit, on étudie d'abord la suite de fonctions  $(f_n)$  avec,  $f_n(x) = \ln(g_n(x))$ . On considère la série de fonctions  $\sum_{n \geq 2} u_n$  avec :

$$\forall x \in I, u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x) = \ln\left(\frac{g_n(x)}{g_{n-1}(x)}\right)$$

soit :

$$u_n(x) = -x \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

**i) Convergence simple de la série  $\sum_{n \geq 2} u_n$  :** On fixe  $x > 0$ , un développement de  $u_n(x)$  à l'ordre 2 en  $1/n$ , lorsque  $n \rightarrow \infty$  donne :

$$u_n(x) = \frac{x(1+x)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{x(1+x)}{2n^2} > 0$$

Le terme de droite est le terme général d'une série positive, convergente, donc la série  $\sum_{n \geq 2} u_n(x)$  converge et le suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$ . La suite  $(g_n)$  converge alors simplement sur  $I$  vers  $\exp(f) > 0$  notée  $\Gamma$ .

**ii) Convergence normale de la série  $\sum_{n \geq 2} u_n$  sur tout segment de  $I$  :** le plus simple est d'étudier les variations de  $u_n$  sur un segment  $[a, b] \subset I$ . On trouve que  $(u_n)$  croît sur  $[a, b]$  à partir d'un certain rang  $N$  qui ne dépend que de  $a$  et de  $b$ , donc, pour  $x \in [a, b]$  et  $n \geq N$  :

$$0 \leq u_n(x) \leq u_n(b) \quad \text{ie} \quad \sup_{[a,b]} |u_n(x)| \leq u_n(b)$$

Le théorème 1 permet alors de conclure à la continuité de  $f$ , donc de  $\Gamma$  sur  $I$ .

**iii) Dérivée logarithmique de  $\Gamma$  :** On prouve que la série  $\sum_{n \geq 2} u'_n$  converge normalement sur tout segment de  $I$  par la même méthode que dans ii). Le théorème 3 assure alors que  $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{R})$  et que, pour  $x \in I$  :

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n - \sum_{k=0}^n \frac{1}{x+k}$$

On en déduit que  $\Gamma = e^f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et que :

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = f'(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(n+x)}$$

(Fonction, notée  $\Psi$  par Maple qui en fait un usage intensif.)

□

*Exercice 7.* Montrer que :

$$\Gamma(1) = 1 \quad \text{et} \quad \Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$$

Montrer que  $\ln \circ \Gamma$  est convexe et que  $\Gamma$  est la seule fonction dont le logarithme est convexe et qui vérifie les conditions ci-dessus.

*Exercice 8.* Développement asymptotique de  $\Psi$  à deux termes au voisinage de 0.

*Exercice 9.* Soit  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ . Montrer que  $f$  est définie et continue sur  $[0, +\infty[$ . Prouver que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ . Que dire de  $f'$  au voisinage de 0 ?

*Exercice 10.* Étudier la dérivabilité de la série de fonctions de l'exemple 7.

### 3.3 Double limite

**Théorème 5 (Théorème de convergence dominée pour les séries).**

*Il s'agit d'un corollaire, relativement plus précis, du théorème précédent.*

Soit  $(u_n)$  une suite de fonctions de  $I = [a, +\infty[$  ( $a \in \mathbf{R}$ ) qui possède les propriétés suivantes :

- i) Il existe une suite  $(a_n)$  de réels positifs telle que la série  $\sum a_n$  converge et :

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbf{N}, |u_n(x)| \leq a_n$$

De sorte que la série de fonctions  $\sum u_n$  converge normalement sur  $I$  vers une fonction  $f$ .

- ii) Pour chaque entier  $n$ , la fonction  $u_n(x)$  admet une limite  $l_n \in \mathbf{C}$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

Alors :

- $\forall n \in \mathbf{N}, |l_n| \leq a_n$ . De sorte que la série  $\sum l_n$  converge absolument.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n$ .

Résultat analogue pour  $-\infty$ .

*Exercice 11.* Étudier par deux méthodes, (Théorème précédent et majoration directe) la limite, quand  $x \rightarrow +\infty$ , de la fonction  $\zeta$  définie, pour  $x > 1$  par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

Donner un développement asymptotique à deux termes de  $\zeta(x)$  quand  $x \rightarrow +\infty$  et quand  $x \rightarrow 1_+$ .

*Exercice 12.* Étudier la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x+n^2}$ . Equivalent de la somme  $S(x)$  en 0 et  $+\infty$ .

*Exercice 13.* Étude de

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-\sqrt{nx}}$$

Limite en  $+\infty$ , équivalent en 0 et  $+\infty$ .

*Exercice 14.* Soit  $z \in \mathbf{C}$ . En utilisant la série d'applications de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{C}$  de terme général  $u_k$  avec :

$$u_k(n) = \begin{cases} C_n^k z^k n^{-k} & \text{si } n \geq k \\ 0 & \text{si } n \leq k \end{cases}$$

Prouver que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$ .

*Exercice 15 (Convergence dominée des produits infinis).* Soit  $(u_n)$  une suite de fonctions continues de  $I$  dans  $\mathbf{C}$  avec  $|u_n(x)| \leq a_n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et  $x \in I$ , la série  $\sum a_n$  étant supposée convergente. Montrer que la suite  $(P_n)$  de terme général :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 + u_k(x))$$

converge simplement sur  $I$  vers une fonction continue sur  $I$ .

*Exercice 16.* Prouver, par deux autres méthodes, le résultat de l'exercice 14 :

$$\lim \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

- A l'aide du module et de l'argument.
- A l'aide d'une inégalité du type  $|e^z - 1 - z| \leq A|z|^2$  sur un domaine à préciser.

Factoriser le polynôme  $\left(1 + \frac{iX}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{iX}{n}\right)^n$  dans  $\mathbf{C}[X]$ . En déduire une expression de  $\sin x$  comme produit infini.



---

**Théorème 8 (Weierstrass trigonométrique).** *cf cours sur les séries de Fourier.*

## Chapitre 4

# Approximation des fonctions continues

### 4.1 Approximation par des fonctions en escalier

**Théorème 6.** *Toute fonction continue sur un segment  $S$  à valeurs dans  $\mathbf{K}$  peut être approchée uniformément par des fonctions en escalier.*

*Exercice 17.* Approximation d'une fonction continue sur un segment par des fonctions continues et affines par morceaux. Application : Convergence des sommes de Riemann d'une application continue sur un segment vers l'intégrale.

### 4.2 Théorèmes de Weierstrass

**Théorème 7 (Weierstrass).** *Toute fonction continue sur un segment  $S$  à valeurs dans  $\mathbf{K}$  peut être approchée uniformément par des fonctions polynomiales.*

*Exercice 18.* Soit  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbf{C})$  telle que, pour tout entier naturel  $n$  :

$$\int_a^b f(t) t^n dt = 0$$

Montrer que  $f = 0$ .

## Chapitre 5

### Travaux dirigés

1. (Mines 98) Domaine de définition, continuité, dérivabilité de :

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right)$$

2. (TPE 98) Soit  $a > 0$ , on pose  $I(a) = \int_1^a e^x \ln(x) dx$ . Écrire  $I(a)$  comme somme d'une série et calculer  $I(2)$  à  $10^{-1}$  près.

3. Pour  $x > 0$ , on pose :  $u_n(x) = \frac{1}{n + n^2 x}$ .

- (a) Convergence de la série de fonction  $\sum_{n > 0} u_n$  ? Soit  $S$  sa somme.  
 (b) Continuité, variations ?  
 (c) Équivalent de la somme en  $+\infty$  ?  
 (d) Calculer  $S(1/p)$

4. (Centrale 99) Pour  $|x| < 1$  et  $n \geq 1$  on pose :

$$u_n(x) = \frac{x}{n(1 - nx^2)}$$

- (a) Convergence simple et uniforme de  $\sum_{n \geq 1} u_n$  sur  $] -1, 1[$  ?  
 (b) Dérivabilité de  $\sum_{n \geq 1} u_n$  ?  
 (c) Dérivabilité en 0 ?

5. (Centrale 2004) On considère  $f$  défini par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \sin(3^n x)$$

- (a) Montrer que  $f$  est une fonction continue sur  $\mathbf{R}$ .  
 (b) Montrer que  $f$  est périodique et trouver sa période.  
 (c) En trouvant une relation entre  $f(x)$  et  $f(3x)$ , déterminer si  $f$  a une limite en 0.

6. (Cen 2000) On se place sur  $I = ]1, +\infty[$ . Étude de la continuité de la somme de :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{1 + x^n}$$

7. (Mines 2000) Équivalent de  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$  au voisinage de  $1_+$ .

8. On pose, pour  $x > 0$  :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} nx}$$

Continuité et comportement de  $f$  au voisinage de  $0^+$ .

9. (Mines 2002) Montrer que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{R}$  par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$$

est continue sur  $\mathbf{R}$  mais non dérivable en 0.

10. (Centrale 2001)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th}(nx)}{n^2}$$

- (a) Définition et continuité ?  
 (b)  $f$  est-elle  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{R}$  ?  
 (c) Limite de  $f$  en  $+\infty$  ?

11. (CCP 2000) Étudier :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(x^2)}{\operatorname{ch} nx}$$

12. (CCP 2000) Étudier :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} \operatorname{th} \left( \frac{x}{2^n} \right)$$

13. Convergence simple, continuité de la somme, limites aux bornes de la série de fonctions définie sur  $]0, +\infty[$  par :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$$

14. (Cen 98) Domaine de définition  $D$  de :

$$\sum_{n \geq 0} \ln(1+x^{2n})$$

Continuité de la somme sur  $D$ ? Équivalents aux bornes de  $D$ ?

15. Pour  $x \geq 0$ , on pose  $u_n(x) = \frac{x}{n(1+n^2x)}$ . Existence de  $\sum_{n \geq 0} u_n$ , continuité et dérivabilité de la somme sur  $[0, +\infty[$ ?
16. Pour  $x \geq 0$ , on pose  $u_n(x) = \frac{1}{n(n+x)}$ . Existence de  $\sum_{n \geq 1} u_n$ , équivalent en  $+\infty$ .
17. (CCP 97 98 et Cen 2000 2001 2002) Définition, continuité, calcul de la somme de :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$$

18. (Centrale 99) Soit  $\alpha > 0$  et, pour  $x > 0$  et  $n \geq 1$  :

$$f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{\alpha}{n^2 x^2}\right)$$

Convergence de  $\sum_{n \geq 1} f_n$ ? Continuité de la somme? Équivalent de la somme en 0?

19. (Mines 97, Cen 2003) Décomposer en éléments simples la fraction :

$$\frac{1}{X(X+1)\dots(X+n)}$$

Prouver l'existence d'une suite  $(a_n)$  de réels telle que :

$$\forall x > 0, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(x+n)}$$

20. (X 2001)

(a) Prouver l'existence, pour  $z \in \mathbf{C}$  de :

$$\phi(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{2^n}\right)$$

(b) Continuité de  $\phi$  sur  $\mathbf{R}$ ? sur  $\mathbf{C}$ ?

(c) Relation entre  $\phi(z)$  et  $\phi\left(\frac{z}{2}\right)$ ?

21. (Mines 99) Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}$$

(Mines 97) : Calculer sa somme.

22. (Mines) Convergence et limite éventuelle de :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^\alpha}} \quad \alpha > 0$$

23.  $\alpha > 1$ . Pour  $x \geq 0$ , on pose :

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\ln(1+nx)}{n^\alpha}$$

Équivalent de  $f$  au voisinage de 0?

24. (Centrale 2001) Pour  $n \in \mathbf{N}$ , on pose :

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

(a) Définition de  $a_n$  et convergence de  $\sum_{n \geq 0} a_n$ ?

(b) En considérant  $\int_0^1 t^{k-1} \ln t \, dt$ , évaluer  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .

25. (X 2001) Trouver un équivalent quand  $t \rightarrow 1_-$  de :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{1-t^n}$$

26. (Centrale 98) Soit  $f$  une fonction continue de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ , telle que :

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, |f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq M$$

- (a) Que dire si  $M = 0$ .  
(b) Si  $M \neq 0$ , montrer que la suite de fonctions de terme général

$$x \mapsto 2^{-n} f(2^n x)$$

converge simplement vers une application linéaire  $g$  qui est l'unique application linéaire telle que  $f - g$  soit bornée.

27. (Centrale 97) Trouver les fonctions  $f$  continues sur  $] -1, +\infty[$  et vérifiant :

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{(x+1)(x+2)}$$

28. (X 2004) Soit  $g_n$  une suite de réels telle que  $g_0 = 1$  et :

$$g_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g_k}{n-k}$$

- (a) Montrer que  $0 < g_n < 1$ .  
(b) Montrer que  $g_n = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2$ .  
(c) Montrer que  $g_n \sim C n^{-2}$ .