Séries à termes réels et complexes, intégrales généralisées sur une demi-droite

JPB

1er septembre 2008

Table des matières

Première partie
Généralités

1 Notations

- $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. $\mathbf{K}^N$ désigne le $\mathbf{K}$-espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbf{K}$. $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ (resp $\mathbf{C}^N$) est le $\mathbf{R}$ (resp $\mathbf{C}$) espace vectoriel des suites réelles (resp complexes).
- Si K désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, le K-espace vectoriel des applications continues par morceaux sur $[a, +\infty[$, à valeurs dans K sera noté $\mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathrm{K})$.
- Si $P(y)$ est une propriété vérifiée par le complexe y, $(u_n) \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ *(resp* $f \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbf{C})$*)*, on dit que u_n *(resp* $f(x)$*)* **vérifie la propriété** P **à partir d'un certain rang** si :

$$\exists n_0 \in \mathbf{N} \ / \ n \geq n_0 \Rightarrow P(u_n)$$

resp

$$\exists X_0 \geq a \ / \ x \geq X_0 \Rightarrow P(f(x))$$

2 Séries numériques

Définition 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes (resp $f \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbf{C})$). On appelle **suite des sommes partielles de la série** $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ **(on dit aussi de la série de terme général** u_n**)** la suite (S_p) où :

$$\boxed{S_p = \sum_{n=0}^{p} u_n}$$

On dit que **la série** $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ **converge** (*resp* **l'intégrale impropre (ou généralisée)** $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **converge**) si et seulement si la suite (S_p) *(resp la fonction* $X \mapsto \int_a^X f(x)\,\mathrm{d}x$*)* admet une limite quand $p \to \infty$ *(resp quand* $X \to +\infty$*)*. Cette limite est alors appelée **somme de la série** $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ que l'on convient de noter :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad resp \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Dans le cas contraire, on dit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *(resp l'intégrale impropre* $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$*)* diverge.

Remarque 1. La série *(resp l'intégrale impropre)* n'est pas un objet en soi, c'est seulement un "objet du discours". Seules sont définies les assertions : « la série converge » et « la série diverge ». Même chose pour les intégrales.

Proposition 2.1. *Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite complexe, la série $\sum\limits_{n\geq 0} z_n$ converge si et seulement si les deux séries $\sum\limits_{n\geq 0} \mathrm{Re}(z_n)$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \mathrm{Im}(z_n)$ convergent et, dans ce cas :*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}(z_n) + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}(z_n)}.$$

Résultat analogue pour les intégrales impropres.

Idée de la preuve 1. On se ramène à un résultat analogue sur les suites par passage aux sommes partielles.

Exemple 1 *(Convergence et somme de la série harmonique alternée).*

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Exemple 2 *(Convergence et valeur d'une intégrale impropre).* Convergence et calcul de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)(x^2+2x+2)}$$

Maple 2.1. Essayer de faire calculer par Maple :

L'intégrale de l'exemple 2 page 5.

L'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+a)(x^2+x+2)} \quad (a > 0).$$

L'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x)\,(x^2+2\,x+a^2)}.$$

Qu'en pensez vous ?

Définition 2 (Reste d'une série convergente, reste (ou queue) d'une intégrale convergente). Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de complexes, N un entier naturel *(resp* $f \in \mathcal{C}_m([a,+\infty[,\mathbf{C})$ *et* $x > a$ *un réel).* Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- La série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge *(resp l'intégrale impropre* $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge).*
- La série $\sum\limits_{n\geq N+1} u_n$ converge *(resp l'intégrale impropre* $\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge).*

En cas de convergence, la somme de la deuxième série *(resp la valeur de la seconde intégrale)* s'appelle **reste de rang** N de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, *(resp reste (ou queue) de rang* x *de l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$*).* Si l'on pose :

$$\boxed{R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n}$$

Il vient alors, pour tout entier N :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S_N + R_N \qquad \textit{resp} \qquad \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

et :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} R_n = 0 \qquad \textit{resp} \qquad \lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0}$$

Idée de la preuve 2. La définition et le travail sur les sommes partielles *resp les intégrales partielles* des séries concernées *resp des intégrales.*

Remarque 2. $R_N = S - S_N$ représente l'écart entre la somme partielle d'ordre N et la limite S de la suite (S_n) ; interprétation analogue pour les intégrales.

Exemple 3. Accélération de la convergence de la série harmonique alternée. Approximations de $\ln 2$ et $\pi/4$.

Proposition 2.2 (Lien entre suites et séries). *Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de complexes (resp f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a, +\infty[$ dans $\mathbf{C}$). On lui associe la suite $u = (u_n)_{n\geq 1}$ définie par :*

$$\boxed{u_n = a_n - a_{n-1}}$$

(On peut aussi prendre $a_{n+1} - a_n$. Les lecteurs reformuleront ce qui suit dans ce cas). On notera souvent $u = \Delta a$ que l'on appellera **dérivée discrète** *de la suite (a_n). Il vient alors, pour $p \geq 1$:*

$$\boxed{\sum_{n=1}^{p} u_n = a_p - a_0 \qquad \textit{resp} \qquad \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(a)}$$

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
- *La série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ (resp l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$) converge.*
- *La suite (a_n) (resp la fonction f) possède une limite en $+\infty$.*

En cas de convergence, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad \textit{resp} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = f(a) + \int_a^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t}$$

Ce point de vue (ramener l'étude de la convergence d'une suite à celle d'une série) prend son sens si on fait une interprétation cinématique. On peut contrôler la position d'un mobile (dont le mouvement est discret ou continu) via une information globale sur sa vitesse, on ne peut pas faire l'inverse.

Idée de la preuve 3. On travaille sur les sommes *resp les intégrales* partielles.

Exercice de cours 1. Soit $f \in \mathcal{C}_m([0, +\infty[, \mathbf{C})$ et (a_n) une suite strictement croissante de réels qui tend vers $+\infty$. Quel lien y-a-t'il entre :
- La convergence de $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$?
- La convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$?

Soit (u_n) une suite de complexes. On définit la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ par :

$$f(x) = u_n \text{ si } n \leq x < n+1$$

Quel lien y-a-t'il entre :
- La convergence de $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$?

– La convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$?

Proposition 2.3 (Divergence grossière). *Si une série* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *converge alors :*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

La réciproque est fausse. *On peut bâtir facilement un contre-exemple à l'aide de la proposition 2.2 page 7 :*

$$u_n = \ln(n+1) - \ln n \quad ou \quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 *est dite* **grossièrement divergente.**

Proposition 2.4 (Cas des intégrales). *Soit* $f \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbf{C})$ *telle que l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *converge.* **on suppose que** f **admet une limite** l **en** $+\infty$ *alors nécessairement* $l = 0$.

Idée de la preuve 4. Commencer par le cas où la fonction est à valeur réelle et remarquer que, si $l > 0$ il existe X tel que $f(x) \geq l/2$ pour $x \geq X$ puis faire un dessin.

Remarque 3. **ATTENTION LE RÉSULTAT DE LA PROPOSITION 2.3 page 8 EST FAUX POUR LES INTÉGRALES IMPROPRES CON-VERGENTES (*cf* le contre-exemple 3 page 34). D'où la proposition 2.4 page 8.**

Proposition 2.5 (Série géométrique complexe). *Soit* z *un nombre complexe.* **La série** $\sum\limits_{n\geq 0} z^n$ **converge si et seulement si** $|z| < 1$, *dans ce cas :*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}}$$

Si $|z| < 1$ *le calcul du reste d'ordre* n *se fait rapidement en mettant* z^{n+1} *en facteur :*

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{\infty} z^k = \frac{z^{n+1}}{1-z}}$$

Idée de la preuve 5. Calcul de la somme partielle puis convergence d'une suite géométrique vue en HX.

Exercice de cours 2. Calculer à l'aide de la définition :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}, \quad \theta \in \mathbf{R}$$

Proposition 2.6 (Propriétés algébriques). *L'ensemble des suites complexes (resp réelles) $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge est un $\mathbf{C}$ (resp $\mathbf{R}$) sous espace vectoriel de $\mathbf{C}^N$. Plus précisément, si $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ convergent, si λ et μ sont des complexes, alors $\sum\limits_{n\geq 0} \lambda\, u_n + \mu\, v_n$ converge et :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n + \mu v_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

On dispose d'un résultat strictement analogue pour les intégrales convergentes.

Idée de la preuve 6. On se ramène à la linéarité de la limite *via* les sommes partielles.

Remarque 4. Attention à ne pas utiliser ce résultat intempestivement dans l'autre sens. Par exemple :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et sa somme vaut 1 (calculer la somme partielle), pourtant chacune des séries $\sum\limits_{n\geq 1} 1/n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}$ divergent [1].

[1] De la même manière, une suite convergente peut être somme de deux suites divergentes

Si l'on exprime le terme général u_n d'une série convergente sous la forme d'une somme $a_n + b_n$, il faut s'assurer que $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ convergent pour pouvoir écrire :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

En revanche, on peut travailler sur les sommes partielles. Même remarque pour les fonctions.

Exercice 1. Que dire d'une série dont le terme général est la somme des termes généraux d'une série convergente et d'une série divergente ?

Exercice 2. Montrer que l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} (\operatorname{Argsh} x - \operatorname{Argch} x)\,\mathrm{d}x$$

converge et calculer sa valeur.

Remarque 5 *(Au sujet des calculs).* -

- Ne jamais calculer sur des symboles ($\sum$, lim) tant que la convergence n'a pas été prouvée *(pour l'instant on n'a aucun moyen théorique de prouver à priori la convergence d'une série ou d'une intégrale impropre, il faut donc travailler sur les sommes et les intégrales partielles.* Une inégalité est un calcul.
- Dans cet ordre d'idées, si l'on a à établir des inégalités sur des sommes de séries, il est préférable d'écrire les inégalités correspondantes sur les sommes partielles et de les passer à la limite ; même chose pour les intégrales impropres.

Rappel 1 *(Passage d'inégalités à la limite).*

Exemple 4. Soit $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n(n+1)}\right)$ et $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$. On a $0 \leq a_n \leq b_n$ pour $n \geq 1$. On a montré que la série $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ converge. On verra, dans la partie suivante, que cela entraine la convergence de $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$. **une fois cela**

correctement rédigé, on peut écrire, pour tout entier naturel $p \geq 1$:

$$0 \leq \sum_{n=1}^{p} a_n \leq \sum_{n=1}^{p} b_n$$

D'où, en passant cette inégalité à la limite quand $p \to \infty$ **et parce que l'on sait que les limites existent**, on peut écrire :

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1$$

Deuxième partie

Séries numériques à termes positifs

Les lecteurs étendront eux même les résultats de cette section aux séries dont le terme général est de signe constant *(resp à partir d'un certain rang)* ainsi qu'aux fonctions de signe constant à partir d'un certain rang.

Rappel 2 (Théorème de convergence monotone discret et continu).

Proposition 2.7. *Pour qu'une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ de nombres positifs converge il faut et il suffit que la suite (s_p) de ses sommes partielles soit majorée. Il vient alors :*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{p\to\infty} s_p = \sup s_p}$$

Lorsque cette série diverge on a :

$$\boxed{\lim_{p\to\infty} s_p = +\infty}$$

Idée de la preuve 7. La suite (s_p) est croissante.

On a l'analogue suivant dans le cas continu.

Proposition 2.8 (Intégrabilité des fonctions positives). *Soit f une fonction continue par morceaux sur $I = [a, +\infty[$,* **à valeurs réelles positives**. *La fonction F_a, définie sur I par :*

$$F_a(X) = \int_a^X f(x)\,\mathrm{d}x$$

est continue et croissante. Si elle est majorée elle possède une limite finie lorsque $X \to +\infty$, **on dit alors que f est intégrable sur I. Dans le cas contraire il vient**

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F_a(x) = +\infty}$$

Remarque 6. Le sens du mot "intégrable" sera précisé dans la section 4 page 17 pour les fonctions qui n'ont pas un signe constant. Pour l'instant une fonction continue par morceaux sur $I = [a, +\infty[$, positive et telle que $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge est dite intégrable sur I.

3 Comparaison des séries à termes positifs

Rappel 3 (relations de domination et d'équivalence des suites et fonctions). -

- *Si (u_n) et (v_n) appartiennent à $\mathbf{K}^N$, on note :*

$$\boxed{u_n = O(v_n) \text{ si } \exists N \in \mathbf{N},\ \exists M \in \mathbf{R}_+,\ \forall n \geq N,\ |u_n| \leq M|v_n|}$$

$$\boxed{u_n = o(v_n) \text{ si } \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n| \leq \epsilon|v_n|}$$

$$\boxed{u_n \sim v_n \text{ si } u_n - v_n = o(v_n)}$$

S'il existe un rang au dela duquel $v_n \neq 0$, ces propriétés peuvent respectivement s'écrire sous la forme :

$$\boxed{\frac{u_n}{v_n} \text{ bornée}}$$

$$\boxed{\frac{u_n}{v_n} \to 0}$$

$$\boxed{\frac{u_n}{v_n} \to 1}$$

- *On rappelle enfin que si les suites réelles (u_n) et (v_n) sont équivalentes, il existe un rang N tel que u_n et v_n soient de même signe pour $n \geq N$.*
- *On définit des notions analogues pour des fonctions f et g continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ à valeurs complexes ; il faut cependant préciser en plus que l'on se place au voisinage de $+\infty$.*

3.1 Les résultats fondamentaux

Théorème 3.1 (Convergence par domination pour les séries de signe ultimement constant). *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de* **nombres réels positifs** *telles que $u_n = O(v_n)$; alors la convergence de $\sum_{n\geq 0} v_n$ implique celle de $\sum_{n\geq 0} u_n$. (Évidemment la divergence de $\sum_{n\geq 0} u_n$ implique celle de $\sum_{n\geq 0} v_n$). Résultat analogue pour deux éléments f et g de $\mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbf{R})$,* **positifs** *tels que $f = O(g)$ au voisinage de $+\infty$*

Idée de la preuve 8. On utilise la proposition 2.7 page 11 *via* les sommes partielles des deux séries.

Théorème 3.2 (Convergence par équivalence pour les séries de signe ultimement constant). *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels telles que $u_n \sim v_n$* **et v_n positive à partir d'un certain rang** *; alors il en est de même de u_n et les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature. Résultat analogue pour deux éléments f et g de $\mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbf{R})$, tels que $f \sim g$ au voisinage de $+\infty$ et $g \geq 0$ à partir d'un certain rang.*

Idée de la preuve 9. On utilise le théorème 3.1 page 13 dans les deux sens.

Remarque 7. **Ces résultats sont faux en général lorsque les suites (u_n) et (v_n) *(resp les fonctions f et g)* ne sont pas de signe constant,** *cf* les contre-exemples 1 page 33 et 2 page 34 qu'on étudiera plus loin en détail :

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{|\sin x|}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

resp

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \quad \textit{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Exercice 3. Retrouver le résultat de la proposition 2.4 page 8 en utilisant ce qui précède.

Proposition 3.1 (Séries de Riemann). *Pour $s \in \mathbf{R}$, la série :*

$$\sum_{n\geq 1} n^{-s} \quad \text{(resp l'intégrale)} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^s}$$

converge si et seulement si $s > 1$.

Idée de la preuve 10. Encadrement des sommes partielles par des intégrales *via* les variations de la fonction puissance. Cette méthode permet également de trouver un équivalent de la suite (s_p) en cas de divergence.

3.2 Comparaison à une série de Riemann

3.2.1 Recherche d'un équivalent puissance

Lorsqu'on peut trouver un équivalent simple du terme général u_n sous la forme n^{-s}, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang et la nature de la série est celle de la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} n^{-s}$. résultat analogue pour les intégrales

Exercice de cours 3. -

1. Étudier la convergence de l'intégrale impropre :

$$\int_1^{+\infty} \left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} - \sqrt{x^2+1} + a + \frac{b}{x}\right] \mathrm{d}x$$

2. Étudier la convergence de la série :

$$\sum_{n\geq 1} \operatorname{Arccos}\left(\frac{2}{\pi}\arctan(n^\alpha)\right) \text{ avec } \alpha > 0$$

Exercice 4. Étudier les séries de termes généraux :

$$\tan\left(\frac{\pi n}{4n+1}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad \tan\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}\right)$$

$$\left[\operatorname{Arccos}\left(\frac{n}{n+1}\right)\right]^\alpha, \quad \sin\sqrt{\operatorname{Arctg}(n^2+1)} - \sin\sqrt{\operatorname{Arctg} n^2}$$

$$n^{\alpha}\left[\frac{\operatorname{Arctg} n}{\operatorname{Arctg}(n+1)}\right]^{n}, \quad \left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^{n^{\alpha}}$$
$$\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+p)!}, \quad \frac{1}{n^{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}}$$

3.2.2 Méthode $n^{\alpha}u_n$

Cetaines fonctions, telle $f(x) = \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ ne peuvent se développer simplement au voisinage de $+\infty$. Si l'on désire étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 0} f(n)$, on peut tenter de comparer $f(n)$ au terme général d'une série de Riemann n^{-s}. En pratique cela se fait en étudiant le comportement de $n^s f(n)$ au voisinage de $+\infty$. Dans le cas présent :

$$\lim_{n\to\infty} n^2 f(n) = 0, \text{ d'où } f(n) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et, **puisque** $f(n) \geq 0$, la série converge.

Exercice de cours 4 *(Intégrales de Bertrand).* Étudier la convergence de :

$$\int_2^{+\infty} x^{\alpha}\ln^{\beta} x \,\mathrm{d}x \quad \alpha,\, \beta \in \mathbf{R}$$

Exercice de cours 5*.* Étudier les séries de termes généraux :

$$\left[\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right]^{n^{\alpha}}, \quad n^{-\alpha}\left[(n+1)^{\frac{n+1}{n}} - n^{\frac{n}{n-1}}\right]$$

Exercice 5*.* Étudier la série de terme général :

$$1 - \operatorname{th}(\sqrt{\ln(n)})$$

3.3 Comparaison d'une série à termes positifs à une intégrale

Théorème 3.3. *Étant donné une fonction f continue par morceaux sur $[0,+\infty[$, à valeurs réelles positives, décroissante, la série de terme général :*

$$w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)$$

est convergente. En particulier la série $\sum_{n\geq 0} f(n)$ *converge si et seulement si* f *est intégrable sur* $[0, +\infty[$.

Idée de la preuve 11. Dessin qui permet d'interpréter w_n comme une aire et de le majorer par l'aire d'un rectangle qui vaut $f(n-1) - f(n)$.

On peut ainsi retrouver l'étude déja faite des séries de Riemann.

Exemple 5 *(Constante d'Euler).* La suite de terme général :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

Converge vers un réel positif noté γ.

Exemple 6 *(Séries de Bertrand).* Étude de la série de terme général :

$$\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta},\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

3.4 Comparaison à une série géométrique

3.4.1 Comparaison d'une suite à une suite géométrique

3.4.2 Règle de d'Alembert

Exemple 7. Étude de La série de terme général :

$$u_n = k^n \,\mathrm{e}^{\sqrt{n}}$$

pour $k > 0$.

Exercice 6. $a, b > 0$, étudier les séries de terme généraux :

$$\frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n}, \qquad \frac{a^{\sqrt{n}} + n^{\ln(n)}}{b^n + \ln(n)^{\sqrt{n}}}$$

Exercice de cours 6. Imaginer et démontrer un critère analogue pour les intégrales généralisées.

Troisième partie
Convergence absolue, semi-convergence

4 Absolue convergence d'une série, intégrabilité d'une fonction complexe sur une demi-droite

Définition 3. On dit qu'une fonction f **à valeurs complexes**, continue par morceaux sur $I = [a, +\infty[$ est **intégrable** sur I si la fonction positive $|f|$ l'est où, ce qui revient au même, si l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ converge *(ce qui est cohérent avec la définition de l'intégrabilité des fonctions positives à partir d'un certain rang donnée dans la proposition 2.8 page 12)*. On dit aussi que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **est absolument convergente**. On définit de même une série absolument convergente.

Remarque 8. On a encore un résultat analogue à celui prouvé dans la définition 2 page 6.

Théorème 4.1. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$, continue par morceaux et intégrable sur I, alors les fonctions* **positives** *f^+ et f^- le sont également. Il en résulte que $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et :*

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} f^+(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{+\infty} f^-(t)\,\mathrm{d}t}$$

Si maintenant f est une fonction continue par morceaux sur $I = [a, +\infty[$, à valeurs complexe, intégrable sur I alors les fonctions **à valeurs réelles** *$g = \mathrm{Re}(f)$ et $h = \mathrm{Im}(f)$ le sont également. Il en résulte que $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et :*

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t}$$

Résultat analogue pour les séries. **La réciproque est fausse. Le contre-exemple 1 page 33 propose l'exemple d'une intégrale convergente**

mais non absolument convergente et le théorème 6.1 page 19 permettra de montrer que la série harmonique alternée, dont la convergence a déjà été établie à l'exemple 1 page 5 constitue un contre-exemple dans le cas des séries.

Idée de la preuve 12. On remarque que $0 \leq f^+ \leq |f|$ et $0 \leq f^- \leq |f|$ et on utilise l'intégrabilité des fonctions positives par domination. Même méthode pour les séries.

5 Espace vectoriel des suites complexes dont la série associée est absolument convergente

Proposition 5.1 (Série exponentielle). *Si $z \in \mathbf{C}$, la série $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente. De surcroît :*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z}$$

avec :

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y) \quad et \quad x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z$$

Idée de la preuve 13. Formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{zt}$ entre 0 et 1 puis majoration du reste intégral.

Exercice 7. Soit λ un complexe tel que $|\lambda| < 1$ et $(u_n) \in \mathbf{C}^N$ une suite bornée telle que la suite $(u_n - \lambda u_{2n})$ converge. Prouver que (u_n) converge.

Théorème 5.1 (Théorème du point fixe, cas élémentaire). *Soit f une application* **contractante** *d'un intervalle* **fermé** *$I \subset \mathbf{R}$ dans* **R qui stabilise** *I. Alors f admet un unique point fixe x dans I qui est la limite de n'importe quelle suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie récursivement par*

$$x_0 \in I, \qquad x_{n+1} = f(x_n)$$

De plus, si $k \in [0, 1[$ est une constante de contraction de f, il vient :

$$\boxed{x_n - x = O\left(k^n\right)}$$

Idée de la preuve 14. $|x_{n+1}-x_n| \leq k\,|x_n-x_{n-1}|$ puis $|x_{n+1}-x_n| \leq k^n\,|x_1-x_0|$. On en déduit une majoration du reste par sommation des inégalités.

Quatrième partie
Séries alternées

6 Théorème des séries alternées

Définition 4. Une série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ à termes **réels** est dite **alternée** si pour tout entier n, u_n et u_{n+1} (éventuellement nuls) ont des signes contraires *ie* $u_n u_{n+1} \leq 0$.

Exemple 8. La série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ avec $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est alternée pour $\alpha > 0$. La série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ s'appelle **série harmonique alternée**.

Théorème 6.1 (Théorème des séries alternées). *Soit* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *une série alternée,* **telle que la suite** $(|u_n|)$ **tende vers 0 en décroissant**. *On note* S_n *la somme partielle de rang* n *:*

– *Les suites extraites de rang pairs et impairs* (S_{2p}) *et* (S_{2p+1}) *sont adjacentes c'est à dire monotones, de sens de variation opposés et leur différence tend vers* 0.
– *La série* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *converge et sa somme a le signe de* u_0. *Si elle ne converge pas absolument, la série* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *est dite* **semi convergente**.
– *Si* $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$ *est le reste de rang* n *de la série convergente* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *alors :*

$$\boxed{|R_n| \leq |u_{n+1}| \quad \textit{et } R_n \textit{ a la signe de } u_{n+1}}$$

Ce qu'on exprime souvent en disant que "le reste est, en valeur absolue, inférieur à la valeur absolue du premier terme négligé"

Idée de la preuve 15. Dessiner les suites de rangs pairs et impairs sur un axe.

Démonstration. On va se limiter au cas où les termes de rang pair sont ≥ 0 et ceux de rang impair sont ≤ 0. u_n s'écrit donc $(-1)^n a_n$ avec (a_n) décroissante de limite nulle.

a) <u>Convergence de la série</u> : Soit $p \in \mathbf{N}$:

$$S_{2p+2} - S_{2p} = a_{2p+2} - a_{2p+1} \leq 0$$

et

$$S_{2p+1} - S_{2p-1} = -a_{2p+1} + a_{2p} \geq 0 \text{ pour } p \geq 1$$

La suite (S_{2p}) décroît et la suite (S_{2p+1}) croît. De plus :

$$S_{2p+1} - S_{2p} = -a_{2p+1} \leq 0$$

donc :

$$S_{2p+1} \leq S_{2p} \leq S_0 = a_0 \tag{1}$$

et :

$$S_{2p} \geq S_{2p+1} \geq S_1 = a_0 - a_1 \geq 0 \tag{2}$$

La suite (S_{2p}) *(resp* (S_{2p+1})*)* est donc décroissante et minorée *(resp croissante et majorée)*, elle est donc convergente. Posons $l = \lim_{p\to\infty} S_{2p}$ et $l' = \lim_{p\to\infty} S_{2p+1}$. Comme :

$$\lim_{p\to\infty} S_{2p+1} - S_{2p} = 0$$

puisque $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, il vient $l' - l = 0$. Reste à prouver que $S_n \to l$. Soit $\epsilon > 0$, il existe deux entiers p_1 et p_2 tels que :

$$p > p_1 \Rightarrow |S_{2p} - l| < \epsilon \text{ et } p > p_2 \Rightarrow |S_{2p+1} - l| < \epsilon$$

Soit $N = \max(2p_1, 2p_2 + 1)$, si $n > N$, il vient $|S_n - l| \leq \epsilon$ et la convergence de (S_n).

b) <u>Signe de la somme et majoration du reste</u> : Notons S la somme de la série. En passant les inégalités (1) et (2) à la limite quand $p \to \infty$, il vient :

$$0 \leq S \leq a_0 = u_0 \tag{3}$$

Considérons maintenant le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$. Si $n+1$ est pair, la suite $(u_k)_{k\geq n+1}$ satisfait les mêmes conditions que $(u_n)_{n\geq 0}$; on peut donc lui appliquer les inégalités (3) soit :

$$0 \leq R_n \leq u_{n+1}$$

Si $n+1$ est impair, la suite $(-u_k)_{k\geq n+1}$ satisfait les mêmes conditions que $(u_n)_{n\geq 0}$; on peut donc lui appliquer les inégalités (3) soit :

$$0 \leq -R_n \leq -u_{n+1}$$

Dans tous les cas :

$$|R_n| \leq |u_{n+1}|$$

□

Remarque 9. Pour faciliter la compréhension de la preuve, les lecteurs ont intérêt à représenter les suites (S_{2p}) et (S_{2p+1}) sur un axe.

7 Séries se ramenant à une série alternée

Exemple 9. Soit α un réel > 0, la série :

$$\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$

Converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

Démonstration. Soit $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$, Faisons un développement asymptotique de u_n à deux termes :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

Posons :

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

de sorte que $u_n = v_n - w_n$ avec :

$$w_n = \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

La série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ est alternée donc converge. La nature de la série proposée est donc la même que celle de $\sum\limits_{n\geq 1} w_n$ or :

$$w_n \sim \frac{1}{2n^{2\alpha}}$$

donc $w_n > 0$ à partir d'un certain rang et la nature de $\sum_{n\geq 1} w_n$ est celle de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n^{2\alpha}}$ et la conclusion. $\square$

Il y a beaucoup d'exercices de ce type avec des séries en sinus et cosinus. Voici quelques importants exercices d'entraînement :

Exercice de cours 7. Étudier la série de terme général :

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+an+b}\right)$$

Comment pourrait-on le faire avec Maple ?

Exercice 8. Étudier les séries de terme généraux :

$$\frac{(-1)^n}{n-\ln n}, \qquad (-1)^n n^{-\operatorname{th} n}$$

$$(-1)^n \frac{n^\alpha \operatorname{sh}(n^{-\alpha})}{n^\beta + (-1)^n}, \qquad \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt[3]{n+1}}$$

Exercice 9 *(Mines 2008).* Nature de la série de terme général :

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}+\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

Exercice 10 *(Mines 2007).* Étudier la série de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4}+(-1)^n\sqrt{n}\ln(n)^{1/3}}$$

En voici un plus difficile mais classique :

Exercice 11. Étudier la série de terme général :

$$\sin(\pi e n!)$$

Cinquième partie
Convergence de suites, problèmes asymptotiques élémentaires

8 Utilisation d'une série pour prouver la convergence d'une suite

8.1 Suites définie par une somme

Exemple 10. Retour sur la constante d'Euler.

Exercice 12. -

1. Prouver, par deux méthodes, la convergence de la suite de terme général :
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$
2. En déduire, en fonction de la limite l de la suite, un équivalent de :
$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$
3. On note u la limite de (u_n). Exprimer en fonction de u la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

8.2 Suites définies par un produit

8.2.1 À termes réels positifs

Utilisation de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et de $\ln(u_n)$

Exercice 13. Convergence de la suite de terme général :
$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

Exemple 11 *(Fonction gamma).* Prouver, pour $-x \notin \mathbf{N}$ la convergence de la suite :

$$u_n = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

La limite est notée $\Gamma(x)$.

8.2.2 Application aux produits infinis complexes

La notion de produit infini, qui est l'analogue multiplicatif de celle de série, est *stricto sensu* hors programme ; cependant elle faitl'objet de nombreux problèmes et exercices. On retiendra l'idée de base suivante :

POUR ÉTUDIER UNE SUITE DÉFINIE PAR UN PRODUIT DE NOMBRES RÉELS STRICTEMENT POSITIFS, IL EST SOUVENT INTÉRESSANT D'EN PRENDRE LE LOGARITHME

Exemple 12 *(Produits infinis absolument convergents).* Soit (a_n) une suite complexe telle que $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n|$ converge.

1. La suite (P_n) définie par :

   $$P_n = \prod_{k=0}^{n}(1+a_k)$$

   converge ; on étudiera successivement les cas :
   - $a_n \geq 0$ pour tout n.
   - $a_n \in \mathbf{R}$ pour tout n.
   - Cas général en considérant la série de terme général $P_{n+1} - P_n$.
2. $\lim_{n\to\infty} P_n = 0$ si et seulement si il existe n tel que $a_n = -1$.

Exercice 14. si $P = \lim_{n\to\infty} P_n$, majorer $|P_n - P|$ à l'aide de $\sum\limits_{0}^{\infty} |a_n|$.

Exercice 15. Définir $\Gamma(z)$ pour $z \in \mathbf{C} - \mathbf{Z}_-$

9 Encadrement de sommes de séries et de suites

9.1 Télescopage des termes

Si $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite numérique, posons $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$. L'opérateur Δ s'apparente à une dérivation. Pour $0 \leq p \leq n-1$, il vient :

$$\boxed{a_n - a_p = \sum_{k=p}^{n-1} \Delta a_k}$$

analogue discret de la relation :

$$\boxed{f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x}$$

valable pour f de classe C^1 sur $[a, b]$. On en déduit que (a_n) et (b_n) sont des suites réelles telles que pour tout n $\Delta a_n \leq b_n$, alors :

$$a_n - a_p \leq \sum_{k=p}^{n-1} b_k \text{ pour } p \leq n$$

Exemple 13. Soit $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln(n)$ alors

$$0 \leq \gamma - u_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$$

où γ a été définie dans l'exemple 5 page 16.

9.2 Utilisation d'intégrales

Il est intéressant d'essayer de choisir (b_n) de sorte que la somme $\sum\limits_{k=p}^{n-1} b_k$ soit la plus simple possible. Un cas intéressant est celui où la suite (b_n) est **télescopique c'est-à-dire s'écrit simplement sous la forme Δc_n où (c_n) est une suite "d'expression simple" *ie* dont l'expression ne contient plus de $\sum$**. L'exemple le plus fréquent de cette situation est celui où b_n est de la forme $\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$, l'intégrale étant "naturellement télescopique".

Exemple 14. Soit :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-s} \text{ avec } s > 1$$

alors

$$\frac{1}{(s-1)(n+1)^{s-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(s-1)n^{s-1}}$$

On en déduit : $R_n \sim \frac{1}{(s-1)n^{s-1}}$

On développera plus loin des techniques spécifiques de développement asymptotiques de tels restes.

Exercice 16. Prouver l'inégalité :

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{[n(n+1)]^2} \leq \frac{1}{3k^3}$$

Exercice 17. Étudier la série de terme général :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$$

10 Développement d'une intégrale

On renvoie d'abord au théorème 3.3 page 15 qui permet souvent de trouver un développement asymptotique de la somme partielle d'une série "lentement" divergente à la précision $n \mapsto 1$, suffisante pour passer le développement à l'exponentielle par exemple *cf* la deuxième question de l'exercice 12 page 23 ou encore :

Exemple 15. Déterminer, quand $n \to \infty$, un équivalent de

$$u_n = \exp\left(-\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{\ln k}}\right)$$

On va étudier ici une méthode, préconisée par le programme, pour trouver un développement asymptotique (en général d'ordre faible) de la somme partielle (resp le reste) d'une série divergente (resp convergente) $\sum\limits_{n \geq 0} f(n)$ où

f est une fonction continue de classe $\mathcal{C}^k$ (k aussi grand que les calculs l'exigeront), sur un intervalle $[a,+\infty[$, à valeurs réelles. elle consiste à interpréter $f(n)$ comme l'aire d'un rectangle, ce qui permet de le rentrer sous l'intégrale :

$$w_n = \int_n^{n+1} (f(t) - f(n))\mathrm{d}t$$

Puis on intègre par partie en s'arrangeant pour que le terme tout intégré soit nul aux bornes de l'intervalle d'intégration :

$$\boxed{w_n = \int_n^{n+1} (f(t) - f(n))\mathrm{d}(t-n-1) = -\int_n^{n+1} (t-n-1)f'(t)\,\mathrm{d}t \qquad (4)}$$

Exemple 16 *(Séries de Riemann).* Soit $s > 1$. Étudions, quand $n \to \infty$ de :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

On introduit (faire le dessin) :

$$w_n = \frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s}\right) \mathrm{d}t$$

On intègre par parties, en s'arrangeant pour introduire la primitive de $t \mapsto 1$ qui s'annule en $n+1$ soit : $t \mapsto t-n-1$. Il vient alors :

$$w_n = -s \int_n^{n+1} \frac{t-n-1}{t^{s+1}}\mathrm{d}t \qquad (5)$$

D'où :

$$0 \leq w_n \leq \int_n^{n+1} \frac{s}{t^{s+1}}\mathrm{d}t$$

Toutes les séries écrites convergent donc :

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k \leq \int_{n+1}^{\infty} \frac{s}{t^{s+1}}\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^s}$$

D'où (détails laissés aux lecteurs) :

$$0 \leq R_n - \frac{1}{(s-1)(n+1)^{s-1}} \leq \frac{1}{(n+1)^s}$$

On en déduit :

$$R_n \sim \frac{1}{(s-1)n^{s-1}}$$

équivalent qui pouvait être obtenu par un simple encadrement du reste. Cette méthode n'apporte rien de plus mais est intéressante lorsqu'on veut des majorations explicites d'erreurs : séries de fonctions, calcul numérique.

Exercice 18. Donner un développement asymptotique à deux termes de la somme partielle de la série précédente lorsque $s < 1$.

Exercice 19. Donner une valeur approchée à 10^{-3} prés de $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ en sommant au plus 100 termes.

Remarque 10. Cette technique marche bien car f' tend vers 0 « plus vite que f » au voisinage de $+\infty$. Elle ne donnerait rien avec $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ par exemple.

Remarque 11. Pour avoir le terme suivant, il faudrait réintégrer par parties la relation (4) de manière astucieuse (*cf* polynômes de Bernoulli).

Exemple 17. Formule de Stirling

Exemple 18. Développement à deux termes du reste d'une série de Riemann.

11 Décélération de la divergence vs accélération de la convergence

11.1 Développements asymptotiques de sommes partielles et de restes de séries à termes positifs *(resp d'intégrales de fonctions positives)* et applications

Exercice 20. Étudier la série de terme général :

$$\frac{\ln(2)^\alpha + \cdots + \ln(n)^\alpha}{n^\beta} \quad \alpha, \beta > 0$$

Exemple 19.

Trouver un développement asymptotique à deux termes de :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$$

Exemple 20.

Trouver un développement asymptotique à deux termes de :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{th} k$$

Exercice 21. Étudier la branche infinie ($x \to +\infty$) du graphe de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \sqrt[4]{t^4 + t + 1}\, \mathrm{d}t$$

Exemple 21. Formule de Stirling.

Exemple 22. Étude de la convergence de la série de terme général :

$$\prod_{k=2}^{n} \left(2 - \sqrt[k]{e}\right)$$

Exercice 22 *(Mines 2003)*. On pose :

$$P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$$

Déterminer la limite et un équivalent de P_n.

Exemple 23 *(Cas où le terme général croît rapidement)*. Trouver un équivalent de la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k!}$$

Exercice 23. Soit $\lambda \in \mathbf{R}^*$, étudier la série de terme général :

$$\sqrt{n!}\, \sin \lambda \, \sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right) \ldots \sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)$$

Exercice 24. Donner un équivalent simple de :

$$P_n = \frac{3^n\, n!}{4.7\ldots(3n+1)}$$

Exercice 25. Étudier la série de termes général

$$\frac{1}{n}\prod_{k=2}^{n}\frac{\ln(k)}{\ln(k+a)}\ a>0$$

11.2 Cas des séries alternées

Lorsque le terme général "varie lentement", on peut, soit grouper deux termes consécutifs, soit utiliser la moyenne de deux sommes partielles consécutives *(resp de deux restes consécutifs)* .

Exercice 26. En l'écrivant sous forme intégrale, développer asymptotiquement le reste de la série harmonique alternée et en accélérer la convergence.

Exercice 27. Donner des équivalents simples de :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sqrt{k}, \qquad R_n = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

Exercice 28 *(Mines).* Soit f est une fonction convexe sur $[0,+\infty[$ de limite nulle en $+\infty$. Montrer que f est positive et que :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k f(k)\right| \leq \frac{f(n)}{2}$$

Exercice de cours 8. *[un au choix]* Soit $a\in\mathbf{R}$. Quelle est la nature de la série de terme général :

$$(-1)^n\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{a}{k}\right)\ ?\quad (-1)^n\prod_{k=2}^{n}\left(2-\sqrt[k]{e}\right)\ ?$$

12 Développement asymptotique de suites récurrentes

12.1 Suites $u_{n+1} = a_n u_n + b_n$ avec $a_n \neq 0$ pour tout n

Exemple 24. Soit $c > 0$. Trouver un équivalent simple de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1, \qquad u_n = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k + c\,n$$

12.2 Cas d'un point fixe attractif

Exemple 25. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{R})$, et $a \in I$, intérieur à I et vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\boxed{f(a) = a \quad \text{et} \quad 0 < |f'(a)| < 1}$$

on dit que a est un point fixe attractif de f. On suppose de plus :

i) $f(I - \{a\}) \subset I - \{a\}$.

ii) La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $x_0 \in I - \{a\}$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a.

Alors :

i) $x_n \in I - \{a\}$ pour tout n.

ii) Si $k \in]|f'(a)|, 1[$, $|x_n - a| = O(k^n)$ d'après le critère 3.4.2 page 16.

iii) Il existe une constante non nulle A, dépendant de x_0, telle que, lorsque $n \to \infty$:

$$\boxed{x_n - a \sim A\, f'(a)^n}$$

12.3 Cas d'un point fixe superattractif (méthode de Newton)

Exemple 26. Équivalent de la suite (u_n) définie récursivement par :

$$u_{n+1} = 1 - \cos u_n \quad 0 < u_0 < 2\pi$$

Exemple 27. Comparaison des deux méthodes sur :

$$\tan(x) = x$$

Sixième partie
Sommations de séries

13 Calcul de sommes par la technique de télescopage

13.1 Les polynômes

Exemple 28. Méthode de calcul de $\sum_{k=0}^{n} k^p$ pour $p \in \mathbf{N}$.

13.2 Les fractions rationnelles

13.2.1 Utilisation de la décomposition en éléments simples

Exemple 29. Calcul de :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$$

14 Techniques utilisant des séries de fonctions

Voir plus loin, en particulier le chapitre "séries entières".

Septième partie
Exemples et contre-exemples

15 sur les intégrales et séries de fonctions de signe constant

15.1 Contre-exemples aux théorèmes de comparaison lorsque les suites et les fonctions ne sont pas ultimement de signe constant

Contre-exemple 1 *(Exemple d'intégrales semi-convergentes).* -

1. À l'aide d'une intégration par partie, prouver que l'intégrale impropre :
$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x$$
converge pour $\alpha > 0$.
2. Trouver un équivalent, quand $n \to \infty$, de :
$$I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x, \quad \alpha > 0$$
En déduire une fonction continue dont l'intégrale est convergente et non absolument convergente.
3. On considère les fonctions
$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{|\sin x|}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$
Montrer qu'elles sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ et comparer la nature des intégrales $\int_{\pi}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{\pi}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 29 *(Généralisation de ces résultats).* Soit f une fonction continue, T-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On considère la valeur moyenne de f sur un segment de période :
$$M(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$$
et on note F la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)/x$.
2. Montrer que F est bornée sur $\mathbf{R}$ si et seulement si $M(f) = 0$.
3. à quelle condition l'intégrale généralisée :

$$\int_T^{+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \quad (\alpha \in \mathbf{R})$$

converge-t-elle (on pourra se limiter au cas $\alpha > 0$) ?

Contre-exemple 2 *(Exemple de séries semi-convergentes).* Les séries alternées sont une bonne source d'exemples et de contre-exemples lorsque l'on veut fabriquer des séries qui ne convergent "pas trop vite". Voici un exemple simple de deux suites (a_n) et (b_n) telles que :
- $a_n \sim b_n$.
- $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge et $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ diverge.

$a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $b_n = a_n + \dfrac{1}{n}$. $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge en vertu du théorème des séries alternées. $a_n \sim b_n$ car $\dfrac{1}{n} = o(a_n)$ et $\sum\limits_{n\geq 1}(b_n - a_n)$ diverge donc $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ ne peut converger.

Exercice de cours 9. Retrouver le résultat de la première question du contre-exemple 1 page 33 en utilisant une série alternée. Étudier la convergence de l'intégrale lorsque α est de signe quelconque.

16 Contre-exemples et exemples divers

16.1 Fonction intégrable ne tendant pas vers 0

Proposition 16.1. *Soit (a_n) une suite strictement croissante, divergente, d'éléments de $I = [a, +\infty[$. Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbf{R})$* **à valeurs positives**. *f est intégrable sur I si et seulement si la série de terme général $\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.*

Contre-exemple 3 *(Une application).* Construction d'une fonction positive continue, non bornée et intégrable sur $[0, +\infty[$.

Voici un exercice qui va un peu plus loin.

Exercice 30. 1. Soit (u_n) une suite réelle positive telle que $\lim_{n\to\infty} n\, u_n = 0$. La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge-t-elle ?

2. Soit (u_n) une suite décroissante telle que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. Montrer que $\lim_{n\to\infty} n\, u_n = 0$. Soit (a_n) une suite décroissante positive, $p \geq 2$ un naturel. Prouver que les séries de termes généraux a_n et $p^n a_{p^n}$ sont de même nature.
3. Peut-on trouver une fonction $f \in \mathcal{C}([1,+\infty[,\mathbf{R})$, à valeurs positives, intégrable sur $[1,+\infty[$ et telle que la fonction $x \mapsto x^\alpha f(x)$ ne soit bornée pour aucun réel α ?
4. Que pensez vous de l'analogue discret de cette question ?

Huitième partie

Développement décimal d'un nombre réel

17 Définitions et notations

– La partie entière d'un réel x est notée $[x]$. Elle vérifie les inégalités $[x] \leq x < [x]+1$.

– Toutes les suites considérées dans cette section sont des suites $(r_n)_{n\geq 1}$ d'entiers naturels tels que :

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ 0 \leq r_n \leq 9}$$

On notera S leur ensemble.

– On notera S' l'ensemble des suites (r_n) appartenant à S telles que :

$$\boxed{\forall p \in \mathbf{N}, \exists n > p,\ r_n \neq 9}$$

Une suite $(r_n) \in S'$ sera dite **propre**, une suite $(r_n) \in S - S'$ est caractérisée par :

$$\boxed{\exists p \in \mathbf{N}, \forall n > p,\ r_n = 9}$$

elle est dite **impropre**.

– **Un nombre décimal** est un réel de la forme $a\,10^{-p}$ où $a \in \mathbf{Z}$ et $p \in \mathbf{N}$; leur ensemble est noté $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{10}\right]$, c'est un sous anneau de $\mathbf{Z}$.

L'objectif de cette partie est d'établir que l'application :

$$(r_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{10^n}$$

est une bijection de S' sur l'intervalle $[0, 1[$. Comme tout réel x peut s'écrire :

$$x = [x] + (x - [x])$$

et que $x - [x] \in [0, 1[$, **on va travailler uniquement avec des réels appartenant à cet intervalle**.

18 Approximations d'un nombre réel

Tous les réels considérés appartiennent à $[0, 1[$.

18.1 Parties entières à 10^{-n} prés

Définition 5. Soit $p \in \mathbf{N}$, pour $x \in [0, 1[$ posons :

$$\boxed{a_p(x) = [10^p\, x]}$$

Le décimal $\frac{a_p(x)}{10^p}$ est appelé *approximation décimale de x à 10^{-p} prés par défaut*. Le décimal $\frac{a_p(x)+1}{10^p}$ est appelé *approximation décimale de x à 10^{-p} prés par excès*, on verra ci-dessous la justification de cette terminologie.

Proposition 18.1. *$a_p(x)$ est l'entier caractérisé par :*

$$\boxed{\frac{a_p(x)}{10^p} \leq x < \frac{a_p(x)+1}{10^p}}$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\boxed{0 \leq x - \frac{a_p(x)}{10^p} < \frac{1}{10^p} \qquad (6)}$$

ce qui justifie la termilogie adoptée ci-dessus. Il vient alors :

$$\boxed{0 \leq a_p(x) < 10^p}$$

Démonstration. La première double inégalité découle de la carctérisation de la partie entière. La seconde provient de $0 \leq x < 1$. □

Remarque 12. Ces notions s'étendent à tous les réels :

$$3.14159 < \pi < 3.14160$$

Sont les approximations décimales de π à 10^{-5} prés.

18.2 Chiffres

Définition 6. Pour $n \geq 1$, on pose :

$$\boxed{r_n(x) = a_n(x) - 10\, a_{n-1}(x)}$$

Il vient alors :

- $r_n(x)$ est un entier naturel compris entre 0 et 9 *(c'est ce qu'on appelera un chiffre.)*
- Pour $p \geq 1$:

$$\boxed{\frac{a_p(x)}{10^p} = \sum_{n=1}^{p} \frac{r_n(x)}{10^n} \qquad (7)}$$

  Ce qui s'écrit encore :

$$\boxed{a_p(x) = r_1(x)\,10^{p-1} + r_2(x)\,10^{p-2} + \cdots + r_p(x)}$$

  $r_1(x), r_2(x), \ldots, r_p(x)$ sont donc les chiffres de l'écriture décimale de l'entier $a_p(x)$.

Démonstration. Puisque $0 \leq x < 1$, il vient :

$$a_0(x) = [x] = 0 \quad \text{et} \quad a_n(x) = [10^n x] \in \mathbf{N}$$

donc $r_n(x) \in \mathbf{Z}$. Prouvons que $0 \leq r_n(x) \leq 9$. Pour $n \geq 1$:

$$a_n(x) \leq 10^n x < a_n(x) + 1 \tag{8}$$

$$a_{n-1}(x) \leq 10^{n-1}x < a_{n-1}(x) + 1 \tag{9}$$

L'inéquation (9) se réécrit sous la forme :

$$-a_{n-1}(x) - 1 < -10^{n-1}x \leq -a_{n-1}(x) \tag{10}$$

En sommant (8) et 10(10), il vient, compte tenu que la somme d'une inégalité large et d'une inégalité stricte produit une inégalité stricte :

$$r_n(x) - 10 < 0 < r_n(x) + 1$$

Comme $r_n(x) \in \mathbf{Z}$, cette inégalité s'écrit :

$$0 \leq r_n(x) \leq 9$$

Enfin, puisque :

$$a_0(x) = 0 \quad \text{et, pour } n \geq 1 \quad \frac{r_n(x)}{10^n} = \frac{a_n(x)}{10^n} - \frac{a_{n-1}(x)}{10^{n-1}}$$

On obtient l'égalité (7) en sommant cette dernière de $n = 1$ à $n = p$. □

Théorème 18.1. *Soit $0 \leq x < 1$ un réel.*

- *x admet le développement en série convergente suivant :*

$$\boxed{x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)}{10^n} \qquad (11)}$$

- *La suite $r = (r_n(x))_{n\geq 1}$ appartient à S'.*

Démonstration. En faisant tendre p vers ∞ dans (7), on obtient (11), compte tenu de (6).
Supposons maintenant que $r \notin S'$, il existe un entier N, que l'on peut, quitte à l'augmenter, supposer ≥ 1, tel que :

$$\forall n > N, \; r_n(x) = 9$$

Un calcul élémentaire de la somme d'une série géométrique assure alors :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)}{10^n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{r_n(x)}{10^n} + \frac{1}{10^N}$$

Ce qui s'écrit encore :

$$x = \frac{a_N(x) + 1}{10^N}$$

qui contredit la définition de $a_N(x)$. □

19 Représentation décimale d'un nombre réel

Lemme 19.1. *Soit* $r = (r_n)_{n\geq 1}$*, une suite élément de* S'*. La série* $\sum\limits_{n\geq 1} r_n 10^{-n}$ *converge et sa somme appartient à* $[0, 1[$*. On la notera* $\psi(r)$*.*

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq \frac{r_n}{10^n} < 10^{-(n-1)}$$

La série géométrique majorante converge, comme il s'agit de séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geq 1} r_n 10^{-n}$ converge également. Prouvons maintenant que sa somme appartient à $[0, 1[$. Comme $r \in S'$, il existe un entier $p > 0$ tel que $r_p \leq 8$. Donc, pour $N \geq p$, il vient en majorant tous les r_n par 9 sauf r_p qu'on majore par $8 = 9 - 1$:

$$0 \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{r_n}{10^n} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{9}{10^n} - \frac{1}{10^p} \leq 1 - 10^{-p}$$

En passant cette inégalité à la limite, quand $N \to \infty$, il vient :

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{10^n} \leq 1 - 10^{-p} \tag{12}$$

□

Théorème 19.1. *L'application* $\phi : [0, 1[\to S'$ *définie par :*

$$\boxed{x \mapsto (r_n(x))_{n\geq 1}}$$

est une bijection dont la bijection réciproque est l'application ψ *définie ci-dessus.*

Démonstration. On va prouver les deux relations :

$$\psi \circ \phi = Id_{[0,1[} \quad \text{et} \quad \phi \circ \psi = Id_{S'}$$

Soit $x \in [0, 1[$, $\phi(x) = (r_n(x)) \in S'$,

$$\psi \circ \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)}{10^n} = x$$

Réciproquement : Soit $r = (r_n)$ un élément de S', posons :

$$x = \psi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{10^n} \in [0, 1[$$

Soit $p \in \mathbf{N}$. Prouvons que :

$$\frac{a_p(x)}{10^p} = \sum_{n=1}^{p} \frac{r_n}{10^n}$$

Pour $n > p$, on a $0 \leq r_n \leq 9$ et, d'aprés la définition de S', il existe un entier naturel $q > p$ tel que $r_q \leq 8$. On en déduit, puisque toutes les séries convergent :

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{r_n}{10^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{10^n} \leq \sum_{n=1}^{p} \frac{r_n}{10^n} + \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} - \frac{1}{10^q} \tag{13}$$

Notons a_p l'entier naturel défini par :

$$a_p = \sum_{n=1}^{p} r_n 10^{p-n} \quad ie \quad \frac{a_p}{10^p} = \sum_{n=1}^{p} \frac{r_n}{10^n}$$

et prouvons que $a_p = a_p(x)$. La relation (13) s'écrit :

$$\frac{a_p}{10^p} \leq x < \frac{a_p + 1}{10^p}$$

d'où $a_p = [10^p x] = a_p(x)$. Il en résulte, vu la définition des chiffres de x à partir des $a_p(x)$ que, pour tout $n \geq 1$:

$$r_n(x) = r_n \quad \text{donc} \quad \phi(\psi(r)) = \phi(x) = r$$

$\square$

Remarque 13. Soit $x \in [0, 1[$. Il résulte de l'étude ci-dessus qu'il existe une et une seule suite (r_n) **appartenant à** S' telle que $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{10^n}$, c'est la suite $(r_n(x))$. On note alors :

$$\boxed{x = 0, r_1 r_2, \ldots, r_n \ldots}$$

en France et :

$$\boxed{x = .r_1 r_2, \ldots, r_n \ldots}$$

dans la littérature anglo-saxonne. En revanche, il peut exister une autre suite (ρ_n) **appartenant à** $S - S'$ telle que : $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n}{10^n}$. Par exemple :

$$\frac{1}{10} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{9}{10^n}$$

Exercice 31. En utilisant l'algorithme de division appris à l'école primaire, démontrer qu'un réel $x \in [0, 1[$ est rationnel si et seulement si la suite $(r_n(x))$ est périodique à partir d'un certain rang.

20 Travaux dirigés

1. Nature des séries :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(\ln n)^n}{n!} \quad \text{(Ccp 99)}$$

$$\sum_{n\geq 2} \left(1 - \frac{1}{\ln n}\right)^{\sqrt{n}} \quad \text{(Ccp 99)}$$

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n}\right)^{1+1/n}$$

$$\sum_{n\geq 1} \operatorname{Arccos}\left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \alpha > 0 \quad \text{(Ccp 99)}$$

$$\sum_{n\geq 2} \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} \quad \text{(Ccp 99)}$$

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} - \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\sum_{n\geq 1} \mathrm{e}^{a\,n} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n^3} \quad \text{(Ccp 2001)}$$

$$\sum_{n\geq 1} \pi/6 - \arcsin\left(1/2 + n^{-2}\right)$$

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n^{3/4} + \cos n} \quad \text{(Mines 99)}$$

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n n^{1/n}}{\ln n} \quad \text{(Ccp 98)}$$

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}} \quad \text{(Mines 2002)}$$

$$\sum_{n\geq 2} \cos\left[\pi n^2 \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right] \quad \text{(Tpe 99)}$$

$$\sum_{n\geq 1} \cos\left(\arctan n + n^{-\alpha}\right),\ \alpha > 0 \quad \text{(Tpe 03)}$$

$$\sum_{n\geq 1} \operatorname{Arccos}\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \sqrt{\frac{2}{n}}$$

$$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^\alpha},\quad \alpha \in \mathbf{R} \quad \text{(Ccp 01)}$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n + (-1)^{n+1}} \quad \text{(Ccp 01)}$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{|\sin n|}{n}$$

$$\sum_{n\geq 0} \sqrt{\ln\left(n^2+1\right)} - \sqrt{\ln\left(n^2 + \frac{1}{2}\right)} \quad \text{(Centrale 01)}$$

$$\sum_{n\geq 1} \sqrt{\ln(2n+1)} - \sqrt{\ln(2n)} \quad \text{(Mines 04)}$$

2. (Cen 2005) On suppose que la série de terme général $u_n > 0$ converge. Qu'en est-il de la série $\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-1/u_n}$?

3. (Cen 99) Trouver a pour que la fonction :

$$x \mapsto x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2} - \frac{a}{x}$$

soit intégrable sur $[1, +\infty[$.

4. Convergence de :

$$\int_1^{+\infty} (\operatorname{Argsh} x)^{-\operatorname{Argch} x} \, \mathrm{d}x \ ?$$

5. (Ccp 2001) Déterminer a et b tels qu'existe l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x + \frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x} \right] \mathrm{d}x$$

6. (Ccp 2002) Étudier la suite de terme général :

$$u_n = \frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \cdots + \frac{1}{n \ln n} - \ln(\ln n)$$

7. (Ccp 2003) $a > 0$, $s > 0$. Discuter, suivant a et s la nature de la série de terme général a^{u_n} avec :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$$

8. (Mines 2005) Étudier, quand $n \to \infty$ la suite :

$$u_n = \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} \right)^{1/n}$$

9. (Ccp 98) $a > 0$, $b > 0$. p_n désigne le nombre de chiffres de n. Convergence de la série $\sum\limits_{n \geq 0} a^n b^{p_n}$?

10. (Centrale 2001) Étudier la série $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ avec :

$$u_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n^{\alpha}} \qquad (\alpha \in \mathbf{R})$$

11. (Mines 98) soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2p\,x$. On définit une suite (M_n) de points de $\mathcal{P}$ par :
    - $M_1 \in \mathcal{P}$.
    - M_{n+1} est le deuxième point d'intersection de $\mathcal{P}$ et de sa normale au point M_n.

    Notons y_n l'ordonnée de M_n, étudier la série $\sum_{n\geq 1} 1/y_n$.
12. (Centrale 97 et 99) Soit (u_n) une suite réelle telle que, pour tout n, $u_n \neq -1$. On pose :
$$v_n = \frac{u_n}{(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_n)}$$
    (a) On suppose $u_n \geq 0$, pour tout n. Convergence de $\sum_{n\geq 0} v_n$?
    (b) On suppose $\sum_{n\geq 0} |u_n| < +\infty$, en est-il de même de $\sum_{n\geq 0} |v_n|$?
    (c) On suppose $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, en est-il de même de $\sum_{n\geq 0} |v_n|$?
13. (Centrale 2001) Convergence et somme de la série
$$\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) ?$$
14. (Centrale 2005) Existence et calcul de :
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) ?$$
15. (Centrale 97) Soit :
$$u_n = \sqrt{n} + \alpha\sqrt{n+1} + \beta\sqrt{n+2}$$
    Déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ de sorte que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. Déterminer alors la somme de la série.
16. (Ccp 2003) Convergence et somme de la série de terme général :
$$u_n = \frac{1}{\operatorname{ch}(n)\operatorname{ch}(n+1)}$$

17. (Centrale 98) Convergence et somme de :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}$$

18. Convergence et somme de :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{n}$$

19. (Centrale 2002) Étudier la série de terme général :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{t\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge-t-elle ?

20. (Centrale 99) Nature de la série de terme général R_n où :

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

21. (Centrale 2003) Soit (z_n) une suite complexe telle que les séries $\sum\limits_{n\geq 0} z_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} z_n^2$ convergent.On suppose que, pour tout n, $\mathrm{Re}(z_n) \geq 0$. Montrer que $\sum\limits_{n\geq 0} |z_n|^2$ converge mais pas forcément $\sum\limits_{n\geq 0} |z_n|$.
22. (ESPCI 2001) Soit (a_n) une suite de réels positifs telle que la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ diverge. Qu'en est-il des séries :

$$\sum_{n\geq 0} a_n^2,\quad \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{1+a_n},\quad \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{1+na_n},\quad \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{1+n^2a_n}\ ?$$

23. (Mines 98 et 2005) Soit f une bijection de $\mathbf{R}^+$ sur lui même, de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et telle que $f(1) = 1$. Prouver que les séries $\sum\limits_{n\geq 1} 1/f(n)$ et $\sum\limits_{n\geq 1} f^{-1}(n)/n^2$ sont de même nature.

24. (Centrale 2001) Existence de
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x \,\mathrm{d}x}{x^a + \cos x} \qquad a > 0$$
25. (Ccp 98) Soit $f \in \mathcal{C}([1, +\infty[, \mathbf{R})$, croissante, telle que, $f(x) > 1$ pour tout x. Prouver que si $1/f$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$, $t \mapsto \frac{1}{t \ln(f(t))}$ non plus.
26. (Ccp 99) Nature, suivant les valeurs de α, de la série de terme général :
$$u_n = n^{-\alpha} \int_0^n \frac{\arctan x}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$$
27. (Tpe 97) Etudier la série de terme général :
$$\ln\left(\tan\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)\right)$$
28. (Ccp 99) Soit (a_n) le terme général positif d'une série convergente. Que dire de la série de terme général $a_n^{1-1/n}$?
29. (Espci 2007) Soient (v_n) et (u_n) deux suites réelless positives telles que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n \ln n = 0$ et la série de terme général u_n converge. Montrer que la série de terme général $u_n^{1-v_n}$ converge.
30. (X) Soit $u = (u_n)$ une suite de réels. On note Δu la suite définie par :
$$\forall n \in \mathbf{N},\ \Delta u_n = u_n - u_{n+1}$$
On pose aussi : $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$. On considère dans tout l'exercice une suite $u = (u_n)$ bornée telle que la suite $\Delta^2 u$ soit positive.
    (a) Montrer que la suite (u_n) décroît et converge.
    (b) Montrer que $\lim_{n\to\infty} n\,\Delta u_n = 0$.
    (c) Prouver que la série de terme général $(n+1)\,\Delta^2 u_n$ converge et exprimer sa somme en fonction de u_0 et de la limite de la suite (u_n).
31. (Ccp 99) Soit (a_n) une suite réelle telle que, pour tout entier naturel n, $0 < a_n < 1$. On définit une suite (b_n) par $b_0 \geq 0$ et
$$\forall n \geq 1,\ b_n = \frac{b_{n-1} + a_n}{1 + a_n b_{n-1}}$$

(a) Montrer que (b_n) possède une limite L.

(b) Montrer que si $0 \leq b_0 \leq 1$, alors $0 < L \leq 1$.

(c) Montrer que si (a_n) possède une limite non nulle alors $L = 1$.

(d) On suppose $b_0 > 1$. Prouver que $L = 1$ si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ diverge.

32. (X 2000) $u_0 > 0$, (a_n) est une suite positive à laquelle on associe la suite (u_n) définie par u_0 et la récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$$

Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ converge. Traiter une question analogue avec la suite (v_n) doublement récurrente définie par :

$$v_0 > 0, v_1 > 0, \quad v_{n+2} = a_n v_{n+1} + v_n$$

33. (X) Soit (x_n) une suite de réels ≥ 1. Prouver que la suite de terme général :

$$u_n = \sqrt{1 + x_1\sqrt{1 + x_2\sqrt{1 + \cdots + x_{n-1}\sqrt{1 + x_n}}}}$$

converge si et seulement si la série :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(x_n)}{2^n}$$

converge.

34. (Ens 2000) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbf{R})$ telle que f' soit bornée et que $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existe. Prouver que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

35. (Cen 2000) Soit $f \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[, \mathbf{R})$, telle que,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x\, f'(x) = b$$

Montrer que $b = 0$.

36. (Mines 96) Soient α, β, γ strictement positifs. Étudier la convergence de $\sum_{n\geq 1} u_n$ avec :

$$u_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha+i)\prod_{i=0}^{n-1}(\beta+i)}{\prod_{i=0}^{2n-1}(\gamma+i)}$$

37. Soit $u_{n+1} = u_n\sqrt{1+u_n}$. Prouver l'existence de $k > 0$ tel que :

$$u_n \sim k^{(3/2)^n}$$

38. (Ens) Soit (a_n) une suite positive. On lui associe la suite (x_n) définie par $x_0 > 0$ et la récurrence :

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \sqrt{x_n^2 + a_n}}{2}$$

Prouver que la suite (x_n) et la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ sont de même nature.

39. (X 2000) Soit $f \in \mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbf{R})$.
    (a) On suppose que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, montrer que, quand $x \to +\infty$, $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \sim x$.
    (b) On suppose que $\lim_{x\to\infty} f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Montrer qu'existe $\epsilon \in \{-1,1\}$ tel que $f(x) \sim \frac{\epsilon}{\sqrt{2x}}$ quand $x \to +\infty$.
    (c) Soit $(a_n) \in]0,+\infty[^{\mathbf{N}}$ telle que $a_n \sum_{k=0}^{n} a_k \to 1$. Trouver un équivalent de (a_n).

40. (Mines 99) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}_+,\mathbf{R})$ telle que $f > 0$ et $f' < 0$. On pose $h = f/f'$ et on suppose que, quand $x \to +\infty$ on a :

$$\frac{1}{x} = o\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) \quad \text{et} \quad h'(x) = o(1)$$

Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $f(x) \leq x^{-1/\epsilon}$ pour x assez grand, en déduire que f est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Montrer que, quand $x \to +\infty$:

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \sim -\frac{f^2(x)}{f'(x)}$$

41. (Ens 04) Soit f une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ à valeurs réelles strictement positives, de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que :
$$\lim_{x\to+\infty} x\,\frac{f'(x)}{f(x)} = 0$$
   (a) Soit $a > 0$. Déterminer la limite de la fonction $x \mapsto x^{-a} f(x)$ quand $x \to +\infty$.
   (b) f a-t-elle une limite en $+\infty$?
   (c) Même question avec $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
42. (X 08) Soit (u_n) une suite de réels telle que la série de terme général u_n converge mais que la série de terme général $|un|$ diverge. Montrer que pour tout $L \in \mathbf{R}$, il existe une suite (ϵ_n) à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n\epsilon_n = L$
43. Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles telle que, pour toute fonction ϕ continue sur $[0, +\infty[$ et intégrable sur $[0, +\infty[$, $f\,\phi$ le soit aussi. Montrer que f est bornée.
44. (Mines 99) Soit (a_n) une suite strictement positive décroissante telle que la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ soit convergente de somme S. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :
   – Pour tout n, $a_n \leq \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$.
   – Pour tout $t \in]0, S]$ il existe une application strictement croissante $\phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\phi(n)} = t$

   [NDLR : Il semble qu'on n'ait posé que la première implication]. Quel est l'ensemble des réels x qui peuvent s'écrire sous la forme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{n^2}$ avec $\epsilon_n \in \{0, 1\}$ pour tout n ?
45. (X 99) Soit (c_n) une suite complexe telle que la suite (nc_n) soit bornée. On pose :
$$A = \sup |c_n| \qquad B = \sup n|c_n|$$
   (a) Prouver l'inégalité :
$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{k+2}{(k+1)^2}$$

(b) Montrer que $\sum_{n=k+1}^{\infty} |c_n|^2 \leq 2AB$ *[Indication : Couper la somme en deux par un indice proche de B/A].*

46. (X)

(a) Prouver, pour $a_1 \ldots a_n \geq 0$, l'inégalité :

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

(b) Prouver l'inégalité :

$$\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n!$$

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs tels que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge. Prouver l'inégalité (de Carleman)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{u_1 \ldots u_n} \leq \mathrm{e} \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

47. (Ens 97) Soit $\alpha > 0$ et $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite > 0. Les séries $\sum_{n\geq 1} a_n$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha a_n}$ peuvent-elles converger simultanément ?